

北海道大学大学院環境科学院
地球圏科学専攻
大気海洋物理学・気候力学コース

平成27年度大学院修士課程秋季特別入試
基礎学力試験

数学・物理学(古典物理学)より計2問出題されている。その全てに解答すること。1問につき1枚の解答用紙を使用し、解答用紙には問題番号を記入すること。

平成26年10月

問題 1

問 1 次の初期値問題を解け。

(a) $\frac{dx}{dt} + 2x = 0, \quad x(0) = 1$

(b) $\frac{dx}{dt} + 2x = t, \quad x(0) = 1$

問 2 次の式を満たす複素数 z の実部と虚部を求めよ。ただし、虚数単位を i とする。

(a) $z^2 = i$

(b) $e^z = 3i$

問 3 3次元の位置ベクトルを \mathbf{r} 、その大きさを $r = |\mathbf{r}|$ とするとき、以下のものを \mathbf{r} , r を使って表せ。

(a) ∇r^2

(b) $\nabla \cdot \mathbf{r}$

(c) $\nabla \times \mathbf{r}$

問 4 2行2列のある行列 A による1次変換は、2次元の位置ベクトル $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を直線 $y = 2x$ に対して対称な位置ベクトルに変換する。

(a) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ は A によってどのような位置ベクトルに移されるか。それぞれ答えよ。

(b) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ が A の固有ベクトルであることを示せ。また、それぞれに対応する固有値は何か。

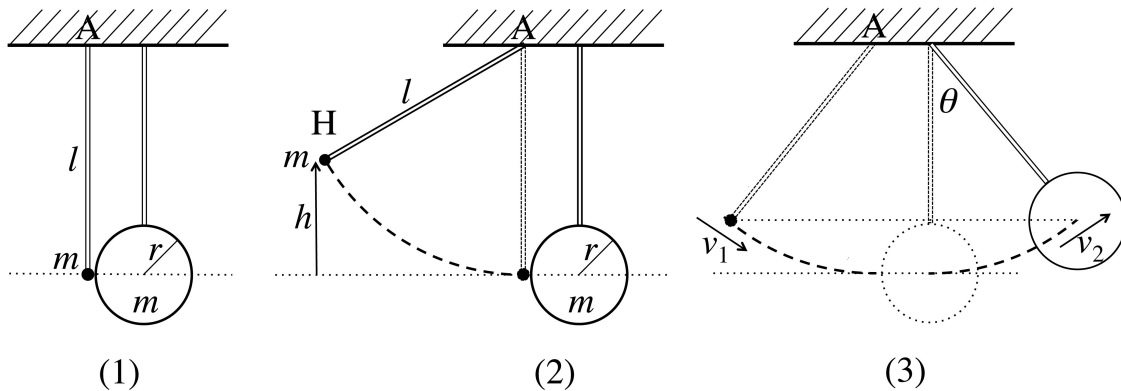
(c) A を求めよ。

問題 2

問 1 半径と質量が互いに等しく、見かけ上の区別が全くつかない 2 つの球がある。ただし、一方は密度が一樣・均質な球であり、他方は中が真空の球殻であることが分かっているとす。2 つの球を破壊せずに識別する力学的方法を一つ挙げ、その根拠について簡潔に説明せよ。

問 2 質量の無視できる長さ l の変形しない棒の一端 A を固定し、他端に質量 m の質点をつける。同様に、半径 r 、質量 m の球殻に質量の無視できる棒を固定し、下図 (1) のように両者が接するように吊るす。続いて、下図 (2) のように、点 A と球殻の重心を含む鉛直面内にあり、静止位置から高さ h に位置する点 H まで質点を持ち上げ、初速度 0 で落下させるとき、以下の問に答えよ。ただし、重力加速度の大きさを g とし、 $0 < r < h < l$ が成り立つものとする。

- 質点が最下点に達し、球殻と衝突する瞬間の質点の速さ v_0 を求めよ。
- 下図 (3) のように、衝突後の球殻の重心の速さ v_2 を、衝突前の同じ高さにあったときの質点の速さ v_1 と比較すると、両者は一般に異なる。どちらが速いか、理由を簡潔に説明しながら答えよ。ただし、質点と球殻とは完全弾性衝突するものとし、衝突により球殻は変形しないものとする。
- 衝突後の球殻の重心が到達し得る最高高度は h より高いか低いかなしいか。理由を簡潔に説明しながら答えよ。
- 棒が鉛直方向となす角を θ 、直径を回転軸とする球殻の慣性モーメントを I とするとき、球殻の運動方程式を θ に関する微分方程式で表せ。



問 3 1 気圧 ($1.0 \times 10^5 \text{ N m}^{-2}$) の下で、 100°C の液体の水 1kg は $1.0 \times 10^{-3} \text{ m}^3$ 、 100°C の水蒸気 1kg は 1.7 m^3 の体積を占める。また、 100°C における水の気化熱は $2.3 \times 10^6 \text{ J kg}^{-1}$ である。いま、1 気圧の下で 100°C の液体の水 10kg を加熱して全て 100°C の水蒸気にした。以下の問に答えよ。ただし、有効数字は 2 桁とする。

- 熱力学第一法則を式で表し、用いた記号の意味を説明せよ。

- (b) 上の過程において水が液体から気体になる際に外に対してした仕事を求めよ。
- (c) 上の過程における内部エネルギーの変化量を求めよ。