

北海道大学大学院環境科学院  
地球圏科学専攻  
大気海洋物理学・気候力学コース

平成31年度大学院修士課程秋季特別入試  
基礎学力試験

数学・物理学(古典物理学)より計2問出題されている。その全てに解答すること。1問につき1枚の解答用紙を使用し、解答用紙には問題番号を記入すること。

平成30年11月

## 問題 1

問 1 以下の初期値問題を解け。また、(b) に関しては、横軸に  $x$  軸、縦軸に  $y$  軸をとって、解の軌跡の概略を図示せよ。

(a)  $\frac{dx}{dt} - x = e^{-t}, \quad x(0) = 0$

(b)  $\frac{dx}{dt} + y = 0, \quad \frac{dy}{dt} - x = 0, \quad x(0) = 1, \quad y(0) = 0$

問 2 以下の定積分を求めよ。

(a)  $\int_0^{\infty} x^2 e^{-x} dx$

(b)  $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy$

問 3 直交直線座標系での位置ベクトルがそれぞれ  $\vec{OA} = (1, 0, 0)$ ,  $\vec{OB} = (0, 2, 0)$ ,  $\vec{OC} = (0, 0, 3)$  と表される 3 点  $A, B, C$  がある。以下の (a), (b) に答えよ。

(a) ベクトル積  $\vec{OA} \times \vec{OB}$  を求めよ。

(b)  $A, B, C$  の 3 点を頂点とする三角形の面積を求めよ。

問 4 2 次方程式

$$iz^2 - 2z + (1 - i) = 0$$

の解を、 $z = a + ib$  ( $a, b$  は実数) の形で表せ。ここで、 $i$  は虚数単位である。

## 問題 2

問 1 密度一様で質量  $M$ 、半径  $R$  の薄い円板を水平に保ち、円板の中心  $O$  を通る鉛直方向の中心軸の周りを自由に回転できるようにする。はじめ、静止した円板の中心  $O$  に質量  $m$  の人が静止している。その後、人は図 1 の  $OABCO$  の順で直径と半円周に沿って移動して円板の中心  $O$  に戻る。人のこの移動に伴い、はじめに静止していた円板は回転する。以下の問に答えよ。

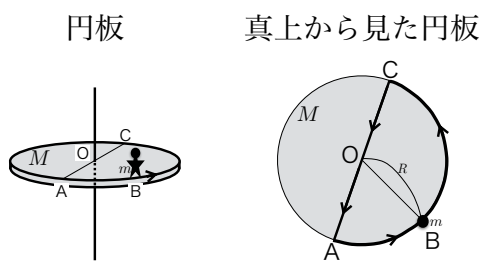


図 1：水平面に置いた薄い円板

- (a) この円板の慣性モーメント  $I$  を求めよ。  
以下の問には、必要であれば  $I$  を用いて答えてよい。
- (b) 人の移動に伴い円板が回転するのは、人がどこからどこまで移動するときか。  
 $OABCO$  のアルファベットを用いて答えよ。
- (c) 円板はどちらの向きに回転するか答えよ。
- (d) 人が移動し終えたとき、円板がはじめの静止状態から回転した角度  $\phi$  を求めよ。
- (e) 円板のかわりに、質量と半径が円板と等しい真円のリングを用意して、図 2 のように回転軸を通す。直径  $COA$  の間に質量の無視できる細い板を渡して、人が円板のときと同じように  $OABCO$  の順で移動する。このとき、リングの回転角度は円板の回転角度  $\phi$  と比べて、どのようになるか。理由とともに 1 行で記せ。

### リング

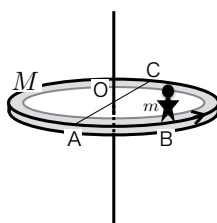


図 2：水平面に置いた真円リング

問 2 熱力学の法則に関する以下の文章中の空欄  ~  を埋めよ。

- (a) 熱力学の第ゼロ法則とは、「系 A と系 B が熱平衡にあり、かつ系 B と系 C が熱平衡にあるならば、系 A と系 C は  にある」という法則である。
- (b) 熱力学の第一法則は、ある巨視的系の内部エネルギーの変化  $\Delta U$ 、この系に加えられた熱  $Q$ 、この系に加えられた仕事  $W$  の関係を表すもので、 という式で表される。
- (c) 熱力学の第二法則は、エネルギーの移動の方向とエネルギーの質に関する法則であり、以下のようにさまざまな言葉で表現される。
- i. 周囲に何の変化も与えずに  の熱源から  の熱源に正の熱を移すことは不可能である。
  - ii. 熱機関の 1 サイクルにおいて、熱源から正の熱を受け取り、これを全て  に変え、なおかつ周囲にそれ以外の変化をもたらさないような熱機関は存在しない。一部の熱をより  の熱源に捨てる必要がある。
  - iii. 一つの熱浴から正の熱を受け取って働き続け、他に何の変化ももたらさないような熱機関は実現不可能である。そのような仮想的な熱機関のことを熱力学では第二種  と呼ぶ。

問 3 理想気体 1 mol について、圧力  $p$ 、体積  $V$ 、温度  $T$ 、気体定数  $R$  として、状態方程式  $pV = RT$  が成り立つ。しかし、実際の気体では低温、高圧になるにしたがい、分子間の平均的な距離が小さくなり、この式が成り立たなくなってくる。その場合の近似式としてよく知られているものにファンデルワールスの式

$$\left(p + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = RT$$

がある。ここで、 $a$  と  $b$  は気体固有の正の定数である。 $\frac{a}{V^2}$  の項と  $b$  の項の物理的な意味をそれぞれ 1 行程度で述べよ。