

北海道大学大学院環境科学院
地球圏科学専攻
大気海洋物理学・気候力学コース

令和3年度大学院修士課程秋季特別入試
基礎学力試験

数学・物理学(古典物理学)より計2問出題されている。その全てに解答すること。問題毎に別の答案用紙を使用し、答案用紙には問題番号・受験番号・氏名を記入すること。答案は手書きとする。

令和2年11月

問題 1

問 1 直交直線座標系 (x, y, z) における、スカラー関数 $\phi = x^2yz + xy^2z - xyz^2$ とベクトル $\mathbf{a} = (x^2y, -xy^2 - y^2z, yz^2)$ に関して、以下を求めよ。

(a) $\nabla\phi$

(b) $\nabla \cdot \mathbf{a}$

(c) $\nabla \times \mathbf{a}$

問 2 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めよ。

問 3 以下の問に答えよ。

(a) 次の関係を示せ。ただし、 N は正の整数であり、また $z \neq 1$ である。

$$\sum_{n=0}^{N-1} z^n = \frac{z^N - 1}{z - 1}$$

(b) 複素数 z に関する方程式

$$z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$$

を解き、すべての解を $z = a + ib$ (a, b は実数、 i は虚数単位) の形で表せ。

問 4 初期値問題

$$\frac{dx}{dt} = x - x^2, \quad x(0) = x_0$$

を、以下の場合について解け。

(a) $0 < x_0 < 1$

(b) $x_0 > 1$

問題 2

問 1 図 1 に示すように、長さ l で質量ゼロの棒の両端に質量 m の質点 A と B を付けたものを滑らかで水平な床の上に横たえ、速さ V_0 で質量 M の質点 C を棒の一方にある質点 B に衝突させることを考える。質点 C は棒と直角に衝突し、衝突後の質点 C の速度は、衝突前のそれと平行であるものとする。また、衝突に際して系の力学的エネルギーは失われないものとする。

- (a) 質点 A が取り付けられている方の棒の一端を床に固定した。ただし、棒は、その周りで自由に回転できるものとする。衝突後の棒の回転角速度を求めよ。
- (b) 棒を床に固定することはせず、自由に動ける状態で、衝突させた。衝突後の棒の重心の速度 (速さと方向) と棒の回転角速度を求めよ。

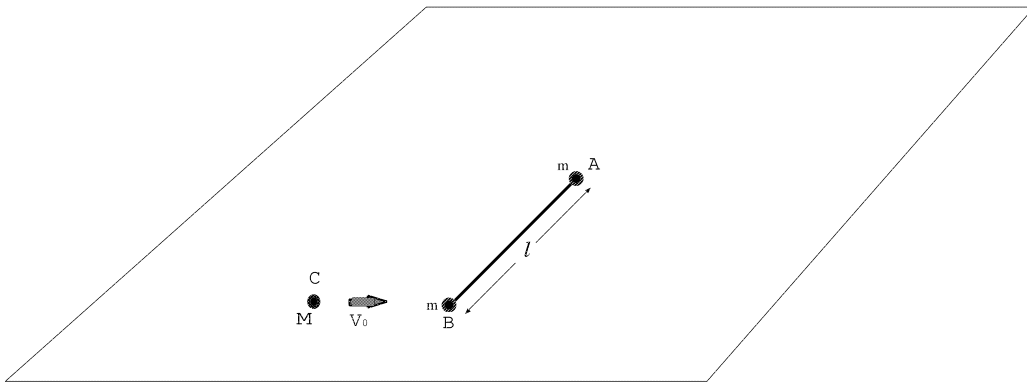


図 1: 棒も質点 A, B, C も水平な床面上に存在する。

問 2 図 2 のような断面積 A_1 のピストン 1 と断面積 A_2 のピストン 2 ($A_1 < A_2$) を持つ液圧ジャッキを用いて、小さい力で重たいものを持ち上げることを考える。用いる液体は圧縮しないものとし、その密度を ρ とする。ピストンの質量は無視できるとする。また、重力加速度は g とする。

- (a) ピストン 1 に力を加えてふたつのピストンが同じ高さを保つようにして、ピストン 2 に質量 M のおもりを載せた際、液体内で増加する圧力はいくらか。またその時、ピストン 1 に加える必要のある力はいくらか。
- (b) 質量 M のおもりをピストン 2 に載せたまま、ピストン 1 を距離 z 押し下げて止めた状態の時、ピストン 1 に加える必要のある力はいくらか。
- (c) 質量 M のおもりをピストン 2 に載せたまま、ピストン 1 とピストン 2 の高さが等しい状態から、ピストン 1 を距離 H 押し下げるまでに、ピストン 1 に与えた仕事を求めよ。

- (d) 前問の仕事と、ふたつのピストンの断面積の比、用いる液体の密度との関係について、それぞれ簡単に述べよ。

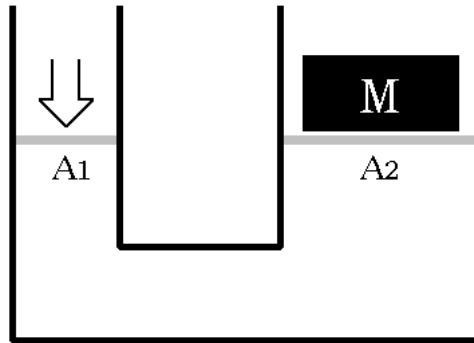


図 2: