

北海道大学大学院環境科学院
地球圏科学専攻
大気海洋物理学・気候力学コース

令和4年度大学院修士課程秋季特別入試
基礎学力試験

数学・物理学(古典物理学)より計2問出題されている。その全てに解答すること。1問につき1枚の解答用紙を使用し、解答用紙には問題番号を記入すること。

令和3年11月

問題1

問1 $\log z = 5 + i\frac{\pi}{3}$ を満たす複素数 z を $a + ib$ の形で求めよ。ただし、 a, b は実数、 i は虚数単位である。

問2 3次元空間における位置ベクトルを \mathbf{r} 、任意の定ベクトルを \mathbf{a} とするとき、 $\nabla \times (\mathbf{a} \times \mathbf{r})$ を求めよ。

問3 行列 $A = \begin{pmatrix} -4 & -10 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$ について、以下の問に答えよ。

(a) A の固有値 (λ_1, λ_2)、固有ベクトルを求めよ。

(b) $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ を満たす P と P^{-1} を求めよ。

問4 以下の定積分 I_n を求めよ。ただし、 n は正の整数である。

$$I_n = \int_0^{\infty} x^n e^{-x} dx$$

問題 2

問 1 図 1 に示されるような鉛直方向の同一直線上に中心軸をもつ二つの円板 A と円板 B を考える。どちらも円板の半径は a 、質量は M で、厚さと密度は一様である。円板 A と円板 B を、中心軸まわりにそれぞれ角速度 ω_A , ω_B で回転させたのち、二つの円板を合体させ一体の円板としたところ角速度 ω で回転した。以下の問に答えよ。

- (a) 円板単体の慣性モーメント I を求めよ。
- (b) ω を求め、さらに、円板が合体したことにより失われるエネルギーを求めよ。
- (c) 図 2 のように円板 B の代わりに、半径 a 、質量 M で、一様なリング C を ω_B で回転させる。リング C の内径と外径の差は無視できるとして、円板 A とリング C が合体したことにより失われるエネルギーを求めよ。

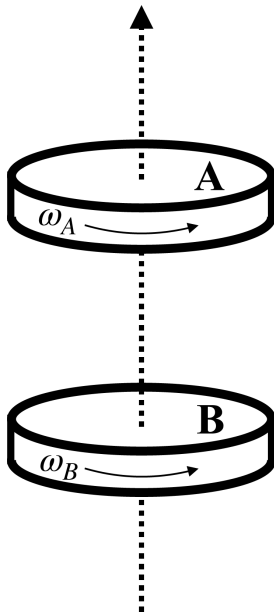


図 1:

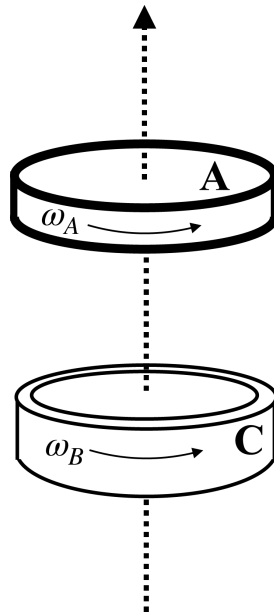


図 2:

問2 図3のようなシリンダーとピストンからなる装置の内部に、温度 T 、圧力 p 、体積 V の理想気体が1モル閉じ込められている。気体の初期の温度、圧力、体積をそれぞれ T_0, p_0, V_0 とするとき、以下の問に答えよ。ただし、気体定数を R 、定積モル比熱を C_v とする。

- (a) 気体の温度を一定に保ったままピストンをゆっくり押して体積を半分にした。この時の圧力を求めよ。
- (b) (a) の過程で、ピストンを押す外力が気体になした仕事を求めよ。また、シリンダーの外に放出される熱を求めよ。
- (c) 次にピストンを引っ張り、体積が V_0 になるまで断熱的に膨張させる。この時、熱力学第一法則から示される、温度の変化 dT と体積の変化 dV の関係を述べよ。
- (d) もとの体積 V_0 に戻ったときの気体の温度を求めよ。また、この気体の温度が T_0 と比して高いか低いかを述べよ。

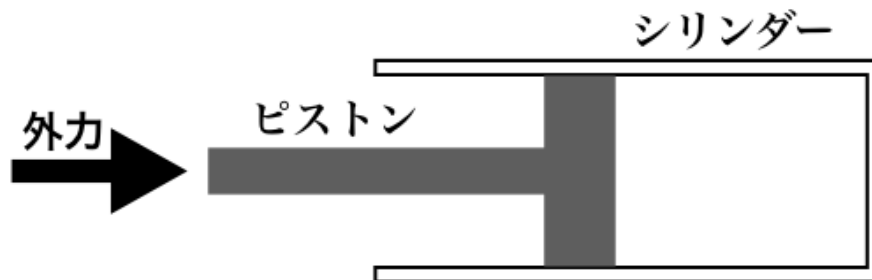


図3: