

北海道大学大学院環境科学院
地球圏科学専攻
大気海洋物理学・気候力学コース

平成20年度大学院修士課程入学試験問題
専門科目

必答問題2問は必ず解答すること。選択問題は、数学2問・物理学2問・地球物理学3問、計7問出題されている。その中から2問を選択し、解答すること。1問につき1枚の解答用紙を使用し、解答用紙には科目名と問題番号を記入すること。

平成19年8月

必答問題 I

問 1 以下のものを計算せよ。なお、 a は定数である。

(a) $\int_0^a e^x \sin x dx$

(b) $\frac{d}{dt} \int_0^{at} e^{x^2} \cos x dx$

問 2 $i^2 = -1$ とする。以下の間に答えよ。

(a) $(\cos x + i \sin x)^n = \cos nx + i \sin nx$ となることを示せ。

(b) $z^2 = i$ となる複素数 z を求めよ。

問 3 直交直線座標系 (x, y, z) における座標軸方向の単位ベクトルを i, j, k 、位置ベクトルを $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ とする。また、 $\nabla = i\partial/\partial x + j\partial/\partial y + k\partial/\partial z$ である。以下のものを求めよ。

(a) $\mathbf{k} \times \mathbf{i}$

(b) $\nabla \cdot \mathbf{r}$

(c) $\nabla \times (\mathbf{k} \times \mathbf{r})$

(d) $\oint_C (\mathbf{k} \times \mathbf{r}) \cdot \mathbf{s} dr$

ここで、 $\oint_C dr$ は $x - y$ 面上の原点を中心とする半径 a の円周に沿って反時計回りに 1 回転する積分を表し、 \mathbf{s} は円周に沿う反時計まわり方向の単位ベクトルである。

問 4 以下の初期値問題の解を求めよ。

(a) $\frac{dx}{dt} + 2x = 0, \quad x(0) = 1$

(b) $\frac{dx}{dt} + 2x = 1, \quad x(0) = 1$

(c) $\frac{dx}{dt} + 2y = 0, \quad \frac{dy}{dt} - 2x = 0, \quad x(0) = 1, \quad y(0) = 0$

必答問題 II

問 以下の括弧 (ア) ~ (セ) に適切な式や数値を記入せよ。なお、答案には途中の計算も記すこと。

- (a) 氷の上に長さ l 、質量 M の板があり、その板の端に質量 m の A さんが立っている。A さんと板は、初期には地上の観測者 B さんから見て、静止しているものとする。いま A さんが板の上を、板に相対的な速度 u で歩きはじめた。そのとき、板が B さんから見て速度 v で動いたとすると、A さんは B さんから見て (ア) の速度で動くことになる。したがって、運動量の保存から (イ) を得る。以上より、A さんが板のもうひとつの端に到達したときには、B さんから見て、板は A さんとは逆向きに (ウ) の距離を移動することになる。ただし、氷と板の間には摩擦はない。
- (b) 図 1 のようなやじろべえがある。長さ $2l$ の腕が長さ a の支持棒によって、中央で支えられている。さらに、腕の両端には長さ b の棒が直角に取り付けられており、その端に質量 m のおもりがついているものとする (腕、棒の質量は無視する)。いま台を支点に角度 θ だけ傾けた後の、やじろべえの運動について考える。

まず $a = b$ の場合を考えよう。このとき左のおもりによる、支点に対する力のモーメントは (エ) である。これに右のおもりによるものを加えた、力のモーメントの総和は (オ) となる。したがって、 $a = b$ の場合、やじろべえは傾いたまま動かない。

次に $a \neq b$ の場合を考える。左のおもりによる力のモーメントは (カ) であり、右のおもりによる力のモーメントは (キ) である。したがって、 a と b の関係が (ク) の場合には、角度の変化を戻そうとする力のモーメントが働くため、やじろべえが傾いても、揺れながら台の上に乗っていることができる。

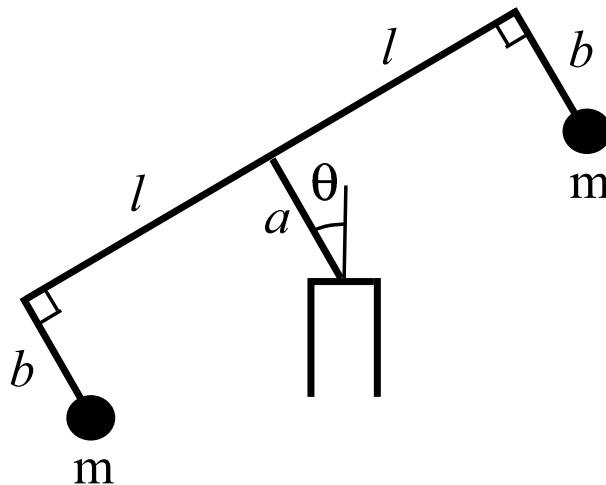


図 1

- (c) 下の図 2 のようなピストン・シリンダー装置の中に、初め圧力 p_0 [N/m²]、体積 V_0 [m³]、1 [mol] の理想気体が満たされている。ピストンの断面積は A [m²] であり、質量は無視できる。このとき、シリンダー内の気体の温度は (ケ) である。その後、熱を加えたところピストンが上昇しシリンダー内の体積が 2 倍になった。この過程で気体が吸収した熱は (コ) である。ただし、気体定数を R [N·m/K·mol]、定積モル比熱を c_v [N·m/K·mol] とする。また、外界の圧力は p_0 で一定である。さらに、装置と外界の間に気体の出入りはなく、上記以外の熱の出入りもないものとする。

次にシリンダー内の気体を p_0, V_0 に戻した状態で、下の図 3 のようにばね定数 k [N/m] のばねをピストンに取り付けた。初期には、ばねは伸縮していない。いま、熱を加えたところ、ばねを縮めながらピストンが上昇し、シリンダー内の体積が 2 倍になった。そのときのシリンダー内の最終圧力は (サ) となり、最終温度は (シ) となる。また気体がピストンを上昇させるためになした仕事の総量は (ス) であるため、シリンダー内の気体が吸収した熱は、最終的に (セ) であることがわかる。

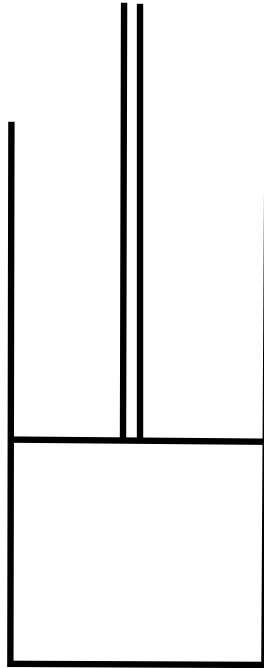


図 2

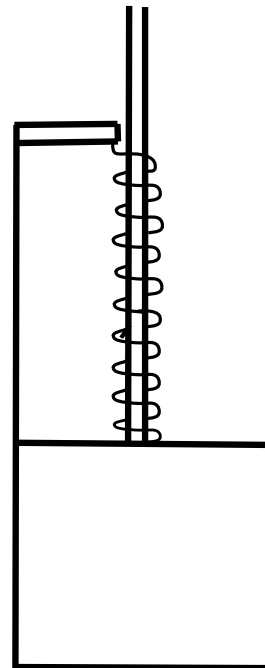


図 3

選択問題：数学・問題 I

行列

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

の平方根行列を求める。以下の問に答えよ。

問 1 A の 2 つの固有値 λ_1, λ_2 と各固有値に属する固有ベクトル u_1, u_2 を求めよ。問 2 u_1, u_2 が一次独立であることを証明せよ。

問 3

$$B = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \end{pmatrix}$$

とした時、 B^{-1} を求めよ。

問 4

$$C = B \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{pmatrix} B^{-1}$$

とした時、 $C^2 = A$ となる α_1, α_2 の組み合わせを求めよ。また、 A の平方根行列である C をすべて求めよ。問 5 以上と同様の方法によって、 n 行 n 列の行列 N の立方根行列を求めるとする。 N が n 個の相異なる固有値 ($\neq 0$) を持つときの立方根行列の個数を求めよ。

選択問題：数学・問題 II

ラプラス方程式

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \quad (1)$$

および、境界条件

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0 \quad \text{at } y = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = 0 \quad \text{at } y = y_0 \quad (3)$$

を満たす自明でない（恒等的に 0 ではない）解 $\phi(x, y, t)$ を変数分離法を用いて求める。

問 1 $\phi(x, y, t) = X(x)Y(y)T(t)$ と変数分離し、分離定数を k^2 とする。このとき、方程式 (1) より

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = -k^2 \quad (4)$$

が得られることを示せ。

問 2 問 1 のときの X と Y の一般解を求めよ。ただし、 X は有界とする。

問 3 同様に、境界条件 (2) より T の一般解を求めよ。ただし、分離定数を l^2 とし、 T は有界とする。

問 4 境界条件 (2) と (3) から、 Y についての境界条件を求めよ。

問 5 問 4 で求めた境界条件を満たす自明でない解 Y が存在するための、 k と l に関する条件を示せ。

問 6 XT が $x \pm ct$ ($c = l/k$) の関数として表されることを示せ。

選択問題：物理・問題 I

平衡状態での長さ L 、バネ定数 k を持つバネと質量 m を持つ質点からなる系に関する以下の問に答えよ。

問 1 下の図 1 にあるように、バネを水平に置き、その一端を壁に固定する。他の端を、摩擦のない平面の上にある質点につなぐ。平衡状態からの質点の変位を X とする。

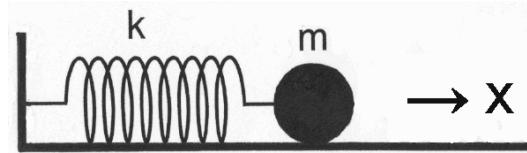


図 1

この質点の運動を表わす運動方程式を書き、各項の意味を言葉で書き表せ。また $X = A \sin(\omega t)$ を解とする時、 ω を m と k で表せ。

問 2 下の図 2 にあるように、質点をバネの両端にひとつずつ付ける。それぞれの位置を X_1, X_2 とする。2 つの質点の運動を表わす運動方程式を書け。さらにこれらの運動方程式に基づいて、2 つの質点の重心に関する運動方程式と、質点間の距離に関する方程式を導け。バネを伸ばすように 2 つの質点を左右に動かして止め、その後で自由に運動させると、どのように動くか説明せよ。説明の中に数式を用いてもよい。

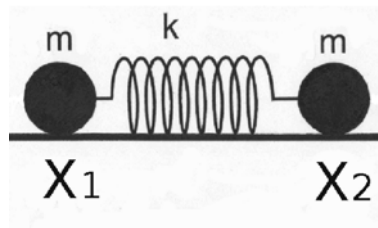


図 2

問 3 下の図 3 にあるように、多くの質点をバネでつなぐ。 i 番目の質点の運動を表わす運動方程式を書け。

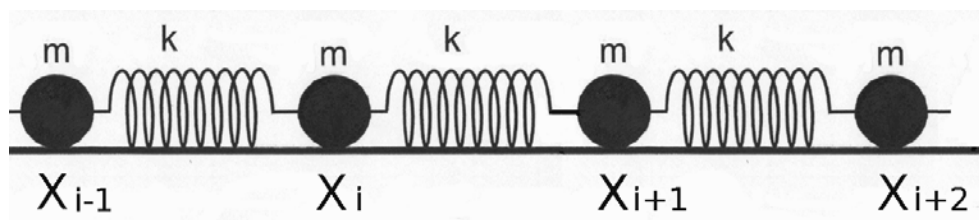


図 3

問 4 問 3 の系が静止しているところで、 i 番目の質点をわずかに右 ($x > 0$) 方向に動かして止めた場合、それに続いて起きる他の質点の運動について定性的に記述せよ。

問 5 問 3 の系を基礎にして、均一のパネに質量が均一に分布している物体を考える。この物体の運動は

$$\frac{\partial^2 X}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} \quad (1)$$

なる波動方程式によって表される。この方程式は $f(x - ct)$ と $f(x + ct)$ の形の関数を解として持っていることを示せ。この解と問 4 で求めた質点の動きとの対応を述べよ。

選択問題：物理・問題 II

容器内に設置された平行板電極の間で、霧吹きにより生成した微小な油滴を落下させてその運動を観察する。油滴の半径を r 、油滴の密度を ρ 、大気の密度を ρ_a 、重力加速度の大きさを g とするとき、以下の問に答えよ。

- 問 1 落下する油滴には、浮力と空気抵抗も働く。ここで、空気抵抗は油滴の半径と落下速度とに比例し、その比例定数を k とする。油滴の運動方程式を求めよ。
- 問 2 油滴は軽いので、その落下速度 v は、落下を始めてすぐに一定の終端速度 v_1 に近づく。終端速度 v_1 を求めよ。
- 問 3 油滴は、霧吹きで生成される際の摩擦や X 線の照射により負に帯電する。そこで、平行板電極に電圧をかけて下向きに大きさ E の一様電場を与えたところ、油滴は上昇を始め、上向きの終端速度 v_2 に達して上昇を続けた。油滴のもつ電荷を $-q$ ($q > 0$) とするとき、 v_2 を E と q を含む式で表せ。
- 問 4 定数 k 、油滴の密度 ρ 、大気密度 ρ_a を既知とすると、一つの油滴について v_1 と v_2 とを測定すれば、その油滴の半径 r と油滴のもつ電荷 q を推定することができる。 r を計算する式を求め、それを利用して q を求める式を導け。
- 問 5 ミリカン (Millikan) は、1909 年から数年にわたってこのような実験を重ね、電気素量を測定した。ミリカンと同様の実験を行った結果、測定された q の値が、 6.4×10^{-19} , 9.6×10^{-19} , 1.6×10^{-18} [C] であったとする。これらの値から、電気素量に関してどのようなことが結論できるか、わかりやすく記述せよ。

選択問題：地球物理学・問題 I

次ページの図 1 A ~ C は、平均的な帯状平均東西風の緯度-高度分布を 1 月、4 月、7 月の各々で平均して描いたものである (ただし並び替えてある)。単位は $[m s^{-1}]$ 、等値線はすべて $5 [m s^{-1}]$ 間隔で、実線と破線はそれぞれ西風と東風を表している。また、図 1 ア ~ ウは、気温について同様の帯状平均分布図を描いたものである。単位は $[K]$ 、等値線間隔は $10 [K]$ である。これらの図から読みとれる大気循環および気温構造に関する以下の問に答えよ。

問 1 1 月の東西風と気温分布の組はどれか、図 1 A ~ C およびア ~ ウからそれぞれ 1 つずつ選んで答えよ。

問 2 問 1 で選んだ組が 1 月の分布であると考えられる根拠を、100 字程度で述べよ。

問 3 図 1 ア ~ ウの気温分布に関して以下の問に答えよ。

- (a) 断熱過程における乾燥大気の温度減率 Γ_d を定圧比熱 c_p と重力加速度 g を用いて表せ。さらに、熱帯対流圏における気温減率を図からおおまかに見積もり、 Γ_d との大小関係を答えよ。簡単のため、熱帯対流圏の気温減率は一定と見なしてよい。また、 $c_p = 1004 [J K^{-1} kg^{-1}]$, $g = 9.8 [m s^{-2}]$ とする。
- (b) 対流圏における気温の鉛直勾配は、中緯度よりも熱帯で小さくなっている。これは主に大気中のどのような過程によるものか、10 ~ 20 字で答えよ。
- (c) 赤道付近では、高度 18 km 付近より上では気温勾配が対流圏とは逆になっている。このような気温の鉛直分布を形成する主な過程を 1 つ、10 ~ 20 字で答えよ。

問 4 図 1 A ~ C で中緯度の高度 12 km 付近に見られる強い西風はジェット気流であり、水平面ではほぼ地衡風として近似できる。地衡風に関する以下の文章を読み、(a) ~ (h) に最もよくあてはまる語あるいは記号をそれぞれの語群から 1 つずつ選んで記せ。

『地衡風は、(a: 摩擦力、気圧傾度力、遠心力、重力、コリオリ力) と (b: 摩擦力、気圧傾度力、遠心力、重力、コリオリ力) が水平面でつりあっているときに吹く風のこと、気象学で最も基本的な概念の 1 つである。地衡風は、(c: 渦度、熱力学、運動、状態) 方程式の各項の相対的な大きさがある条件を満たしていれば、現実の大気の流れに対する妥当な近似となる。その条件は、 $f [s^{-1}]$ をコリオリ・パラメータ、 $L [m]$ を運動の代表的な水平スケール、 $U [m s^{-1}]$ を運動の代表的な速さとしたときに、(d: fU/L , fL/U , UL/f , L/fU , U/fL , f/UL) と定義される (e: ハドレー、レイノルズ、ロスビー) 数が十分に (f: 大きい、小さい) ということである。すなわち、この条件を満足しない (g: 赤道付近、極付近、対流圏界面付近) の流れや、水平スケールの (h: 大きい、小さい) 渦に伴う流れは、地衡風ではよく近似することができない。』

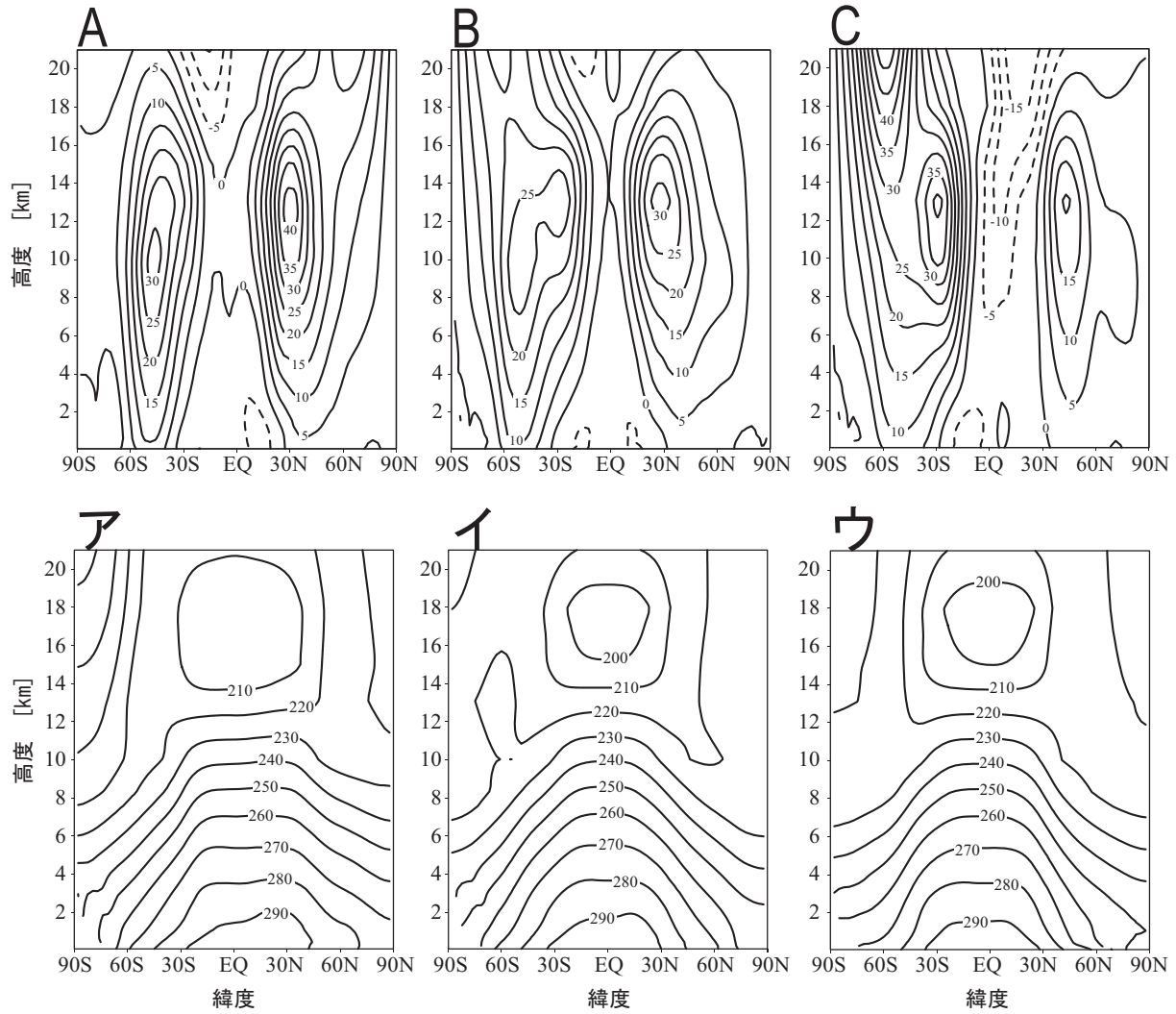


図 1

選択問題：地球物理学・問題 II

問 1 海面の力学的な高さ（ジオイドからのずれ）は図 1 のような空間分布を示す。海面の高さに関する以下の問に答えよ。

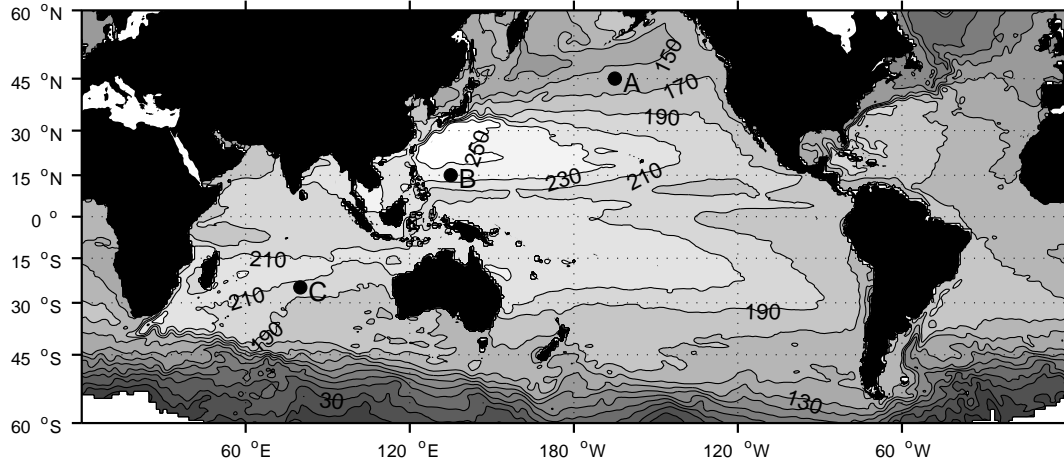


図 1: 海面の力学的高さ分布（ジオイドからのずれ）。単位は cm。コンター間隔は 20cm で、色が濃いほど低い。

- (a) 図中の●で示した地点 A、B、C における海面での流れの向きはどのようになるか。おおよその方向を下の解答例の図にならって矢印で示せ。また、それらの矢印がそうなる理由も答えよ。



- (b) 北緯 20 度から北緯 30 度まで海面が一様に傾いていたとする。この場合、北緯 20 度と北緯 30 度とでは、どちらの流れが速いか？ その理由とともに答えよ。

問 2 水温や塩分などの物理的な特性によって同定できる、均一で成因の同じひとまとまりの海水を水塊とよぶ。次ページの水温-塩分図（T-S ダイアグラム）を読み取って、水塊の混合に関する以下の問に答えよ。

- (a) ある場所での水温と塩分の鉛直分布が図 2a, b のようなものであったとすると、T-S ダイアグラム上では、水温・塩分特性が図 2c のように表される。ここで、200-600m と 600-1000m、600-1000m と 1000-1400m の水塊がそれぞれ上下に少しだけ混合したとすると、水温と塩分の鉛直分布および T-S ダイアグラムはどのようなになるか？ 図 2a, b, c にならっておおまかに描け。

- (b) 南半球中緯度のある点で観測をしたところ、図 2d のような T-S ダイアグラムが得られた。この図から読みとれる塩分極小層は、低塩分の南極中層水が上下の海水と混合してできたものと考えられる。このとき、元の南極中層水はどのような特性をもつと考えられるか？ 水塊のおおよその水温と塩分の値を求めよ。
- (c) この海域の 500m と 1100m の間にある水は、500m と 1100m の海水と南極中層水の 3 種類の海水の混合により形成されているものとする。このとき、塩分極小層 (800m) の水は何%程度の南極中層水を含んでいると考えられるか？ おおよその値を求めよ。
- (d) 図 2d の塩分極小を説明する次の文章を読んで、**A** に入る適切な語句を下の語群の中から選べ。また、**B** に入る説明を 10～20 字で答えよ。

『南半球の中・低緯度では、南極中層水が垂表層での塩分極小層を形成している。南極中層水は、**A** の表面付近にある低塩分の水塊が沈み込んだものである。この水が低塩分なのは、**A** では **B** ためであると考えられる。』

< 語群 >

赤道域 低緯度域 高緯度域

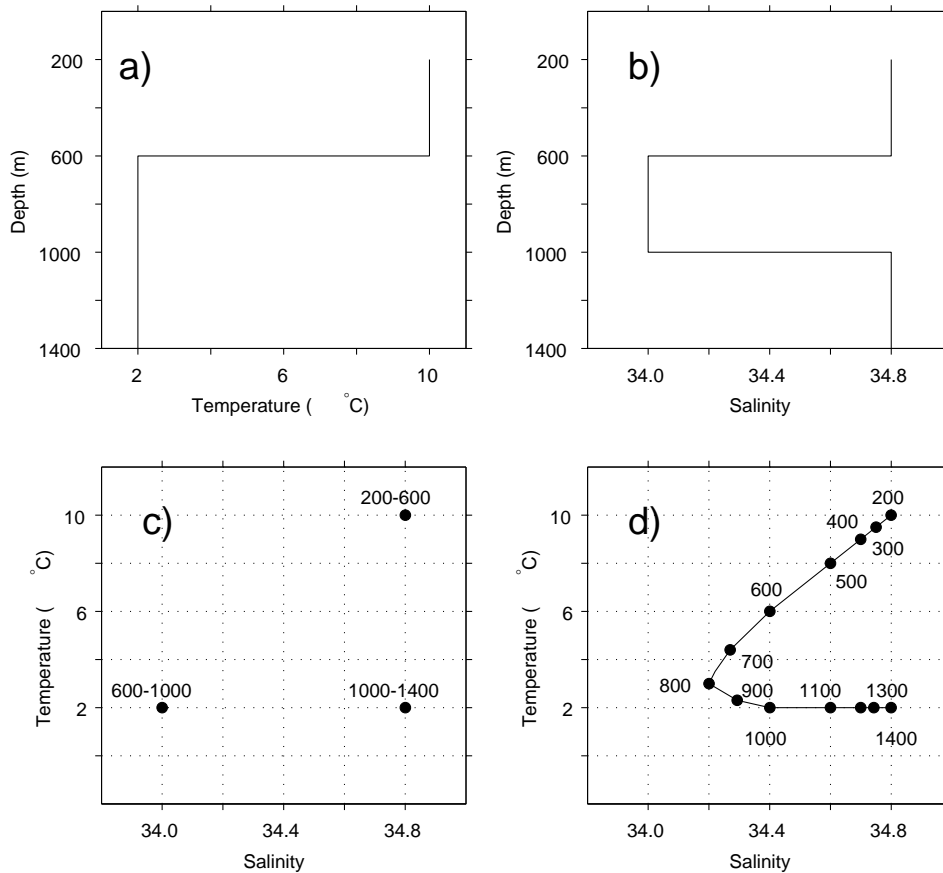


図 2

選択問題：地球物理学・問題 III

以下の問の中から 2 つ選び、それぞれ 300 字程度で答えよ。式や図を用いてもよい。

- (1) 大気の熱力学でよく用いられる温位と相当温位について、それぞれどのような量で、どのような状況で保存されるかを説明せよ。
- (2) 熱帯低気圧と温帯低気圧の相違点を 2 つ挙げ、それぞれの成因と関連づけて説明せよ。
- (3) 海洋潮汐の生じうる原因について述べよ。またそれによって、1 日に 2 回の高潮と低潮が生じうる理由について説明せよ。
- (4) 一様な深さをもつ海洋において極域で沈み込みがあり、内部領域で比較的一様な湧昇が生じている場合、深層の循環はどのような構造になると考えられるか。ポテンシャル渦度をキーワードにして説明せよ。
- (5) 北太平洋の亜寒帯循環について、大気場による強制力およびベータ効果と関連づけて説明せよ。
- (6) 地球温暖化のメカニズムにおいて、水蒸気はどのような役割を果たしているか、放射収支と関連づけて説明せよ。