北海道大学大学院環境科学院
地球圏科学専攻
大気海洋物理学・気候力学コース

令和２年度大学院修士課程入学試験問題
専門科目

問題１と２は必答問題、問題３~９は選択問題である。必答問題２問は必ず解答すること。選択問題は、数学２問・物理学２問・地球物理学３問、計７問出題されている。その中から２問を選択し、解答すること。１ 問につき １ 枚の解答用紙を使用し、解答用紙には問題番号を記入すること。

令和元年８月

問題1： 必答問題

問 1 行列 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$ について、以下の問に答えよ。

(a) $\mathbf{A}$ の固有値、固有ベクトルを求めよ。

(b) $\mathbf{A}$ を対角化せよ。その際、計算過程も記すこと。

問 2 以下を求めよ。

(a) $\displaystyle\int x^n \log x dx$ (n は正の整数)

(b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$

問 3 3 次元空間における原点からの距離を r とし、$\boldsymbol{k}$ を単位ベクトル $(0, 0, 1)$ とするとき、以下を求めよ。

(a) $\nabla^2 r$

(b) $\boldsymbol{\nabla} \times \left(\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{\nabla} r^2\right)$

問 4 以下の微分方程式を解け。

(a) $\dfrac{dy}{dx} = e^{x+y}$

(b) $\dfrac{dy}{dx} + y + \sin 2x = 0, \quad y(0) = 0$

問題 2： 必答問題

問 1 滑らかな床上で静止している質量 m の粒子 2 に、質量 m の粒子 1 を衝突させる場合について、以下の問に答えよ。ただし、粒子は質点であり、衝突の前後で運動エネルギーは保存するものとする。

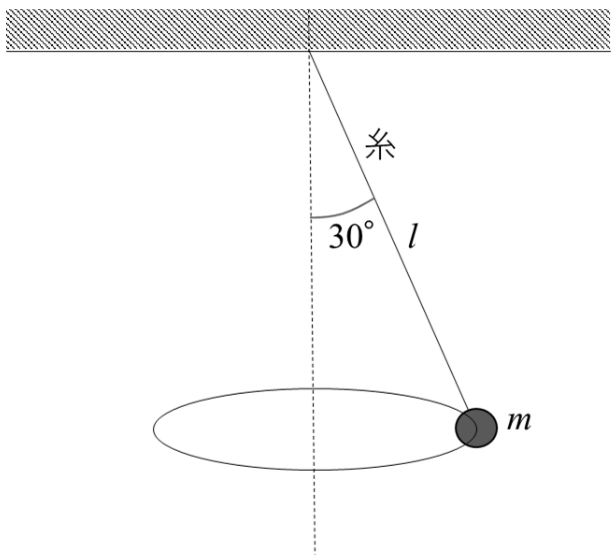
(a) 1 次元の衝突を考える。衝突前の粒子 1 の速さを v_1、衝突後の粒子 1、粒子 2 の速さをそれぞれ V_1、V_2 とするとき、V_1、V_2 を求めよ。

(b) つぎに、2 次元の衝突を考える。衝突前の粒子 1 の速度を $\vec{v}_1$、衝突後の粒子 1、粒子 2 の速度をそれぞれ $\vec{V}_1$、$\vec{V}_2$ とするとき、$\vec{V}_1$、$\vec{V}_2$ は直交していることを示せ。ただし $\left|\vec{V}_1\right| \neq 0$、$\left|\vec{V}_2\right| \neq 0$ とする。

問 2 図のように、質量 m のおもりに軽い糸を結び天井に取り付けた円錐振り子を考える。糸の長さが l のとき、おもりは水平面上を角速度 ω の等速円運動をし、糸が鉛直となす角度は 30° であった。このとき、以下の問に答えよ。また、重力加速度の大きさを g とする。

(a) 糸の張力を求めよ。

(b) l と ω の関係を求めよ。



問 3 以下の (a)-(e) の文章のうち、明らかな間違いを含むものを全て列挙し、どこがどう間違っているのか、正しくはどうあるべきかを述べよ。

(a) 気体温度が同じ場合、水素分子 (H_2) の平均の速さは酸素分子 (O_2) のそれの 16 倍である。

(b) 熱伝導は固体のみで起こる。

(c) 摩擦や熱伝導を伴う過程は不可逆過程である。

(d) 火山等で見られる噴気孔からの白い煙は多くの場合水蒸気である。

(e) 同温・同圧で同数の分子を含む希薄気体の体積は、気体分子の分子量に比例する。

問題 3： 選択問題・数学

2 次元の波動方程式

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) \tag{1}$$

について、境界条件

$$f(0, y, t) = f(a, y, t) = f(x, 0, t) = f(x, b, t) = 0 \tag{2}$$

を満たす自明でない解を、変数分離法で求める。ここで、a, b, c は正の実数である。以下の問に答えよ。

問 1 $f = T(t)F(x, y)$ と分離する。k を分離定数とすると、方程式 (1) より

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + kF = 0, \tag{3}$$

$$\frac{d^2 T}{dt^2} + kc^2 T = 0 \tag{4}$$

が得られることを示せ。

問 2 さらに $F = X(x)Y(y)$ と分離し、α を分離定数とし、β を $k = \alpha + \beta$ となるよう定義すると、

$$\frac{d^2 X}{dx^2} + \alpha X = 0, \tag{5}$$

$$\frac{d^2 Y}{dy^2} + \beta Y = 0 \tag{6}$$

を得ることを示せ。

また、このとき X と Y についての境界条件は、(2) 式よりそれぞれ

$$X(0) = X(a) = 0, \tag{7}$$

$$Y(0) = Y(b) = 0 \tag{8}$$

となることを示せ。

問 3 方程式 (5) と (6) の一般解を求めよ。

問 4 境界条件 (7) と (8) の下で恒等的に $X = 0$ あるいは $Y = 0$ とならないための、α と β についての条件を求め、境界条件 (2) を満たす方程式 (3) の解 F を求めよ。

問 5 方程式 (4) を解いて T の一般解を求め、境界条件 (2) を満たす方程式 (1) の解を求めよ。

問 6 上の解に含まれる α と β の組み合わせのうち、k が小さいものから 6 つ選び、それぞれに対応する F の分布について x を横軸 y を縦軸として概略を図示せよ（$F = 0$ の等値線を書き込め）。ただし、$a = \dfrac{3}{2}b$ とする。

問題 4： 選択問題・数学

問 1 平均が 0 で分散が 1 の正規分布の確率密度関数は、確率変数を x とすると $(-\infty < x < \infty)$、

$$p(x) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \tag{1}$$

と表される。

確率密度関数が式 (1) で表されるとき、確かに平均が 0 で分散が 1 であることを示せ。

問 2 確率変数 $x,\ y$ は独立で、どちらも平均が 0 で分散が 1 の正規分布に従うとき、$w \equiv x^2 + y^2$ の確率密度関数は $p(w) = e^{-w}$ となることが知られている。w の累積分布関数 $F(W)$、すなわち $w \leq W$ となる確率 $P(w \leq W)$ を求めよ。

問 3 N 個の複素確率変数 z_j $(j = 1, 2, .., N)$ は互いに独立で、その実部 x_j、虚部 y_j は独立に平均が 0 で分散が 1 の正規分布に従うとする。$w_j \equiv |z_j|^2$ の全てが W 以下になる確率を求めよ。

問 4 問 3 の w_j $(j = 1, 2, .., N)$ のいずれか 1 つ以上が 11.5 より大きくなる確率を、$N = 1000$ の場合について、有効数字 1 桁で求めよ。なお、$\ln 10 \simeq 2.30$ である。

問題 5： 選択問題・物理学

点 O に、質量 M、長さ l の細い一様な棒の端を取り付ける。このとき、以下の問に答えよ。ただし、棒は剛体であり、点 O を支点として鉛直面内を自由に回転することができるものとする。また、重力加速度の大きさを g とする。

問 1 端を回転軸とする棒の慣性モーメントを I_1、中心を回転軸とする棒の慣性モーメントを I_2 とするとき、それぞれ

$$I_1 = \frac{1}{3}Ml^2, \quad I_2 = \frac{1}{12}Ml^2$$

であることを示せ。

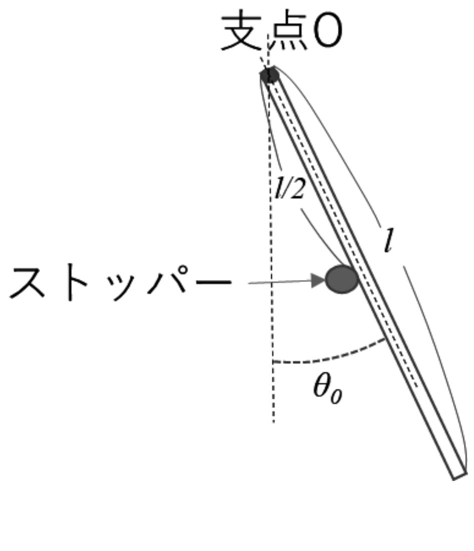
問 2 図のように、$\dfrac{l}{2}$ の位置にストッパーを置いた。このとき棒が鉛直となす角度は θ_0 であった。ストッパーにかかる垂直抗力を求めよ。

問 3 図の状態からストッパーをはずすと、棒は振り子運動をする。鉛直となす角度を θ とするとき、角運動量に関する方程式を立て、それを解いて棒の運動の周期を求めよ。ただし、θ は小さいものとする。

問 4 次に棒を倒立させ（すなわち $\theta = \pi$）静かに手を離す。棒が回り下って鉛直になったときの（すなわち $\theta = 0$）、点 O 周りの棒の角速度を求めよ。

問 5 問 4 の場合で、$\theta = 0$ となったときに棒が支点 O から離れた。点 O から離れた直後における棒の中心の速度を求めよ。

問 6 点 O から離れた直後の力学的エネルギーを、並進の運動エネルギーと回転の運動エネルギーの和として表し、初期の位置エネルギーと同じであることを示せ。



問題6：選択問題・物理学

問 1 熱機関の熱効率 η は、仕事 W と高熱源から吸収した熱量 Q_H を用いて、

$$\eta = \frac{W}{Q_H}$$

と書ける。熱力学第1法則を用いて、η を Q_H と低熱源へ排出される熱量 $-Q_C$ ($Q_C < 0$) を用いて表せ。

問 2 高熱源の温度を T_H、低熱源の温度を T_C とする時、可逆機関の η を T_H と T_C で表せ。また、なぜそのように表されるかも述べよ。

問 3 n モルの理想気体 (気体定数 R) を作業物質とし、以下の 4 つの状態 A, B, C, D を巡る等温変化 (A→ B, C→ D) と定積変化 (D→ A, B→ C) からなる熱機関を考える。

A: 体積 V_1, 温度 T_H

B: 体積 V_2, 温度 T_H

C: 体積 V_2, 温度 T_C

D: 体積 V_1, 温度 T_C

ここで、$V_1 < V_2,\ T_H > T_C$ である。

(a) この熱機関の熱効率を求めよ。なお、定積モル熱容量を c_v とする。

(b) この熱機関の熱源としては温度 T_H の高熱源と温度 T_C の低熱源のみを用いるとし、D→ A では高熱源から熱を得、B→ C では低熱源に熱を放出するものとする。この熱機関を動かすことによって、熱源を含む世界のエントロピーは増加するか、減少するか、それとも変化しないか。変化する場合には 1 サイクル当りの変化量も求めよ。

問題 7： 選択問題・地球物理学

報道によれば、2019 年 5 月 26 日に北海道佐呂間町で気温 39.5°C を観測し、5 月の全国の最高気温を更新した。以下の問に答えよ。

問 1 2019 年 5 月 25 日と 26 日のそれぞれ日本時間 9 時 (00Z) と 21 時 (12Z) とに札幌、稚内、釧路において実施されたラジオゾンデ観測に基づく気温 (°C) の高度分布を図 1 に示す。次のページの文章中の空欄 $\boxed{\text{(a)}}$ ～ $\boxed{\text{(f)}}$ に当てはまる語または数値を答えよ。

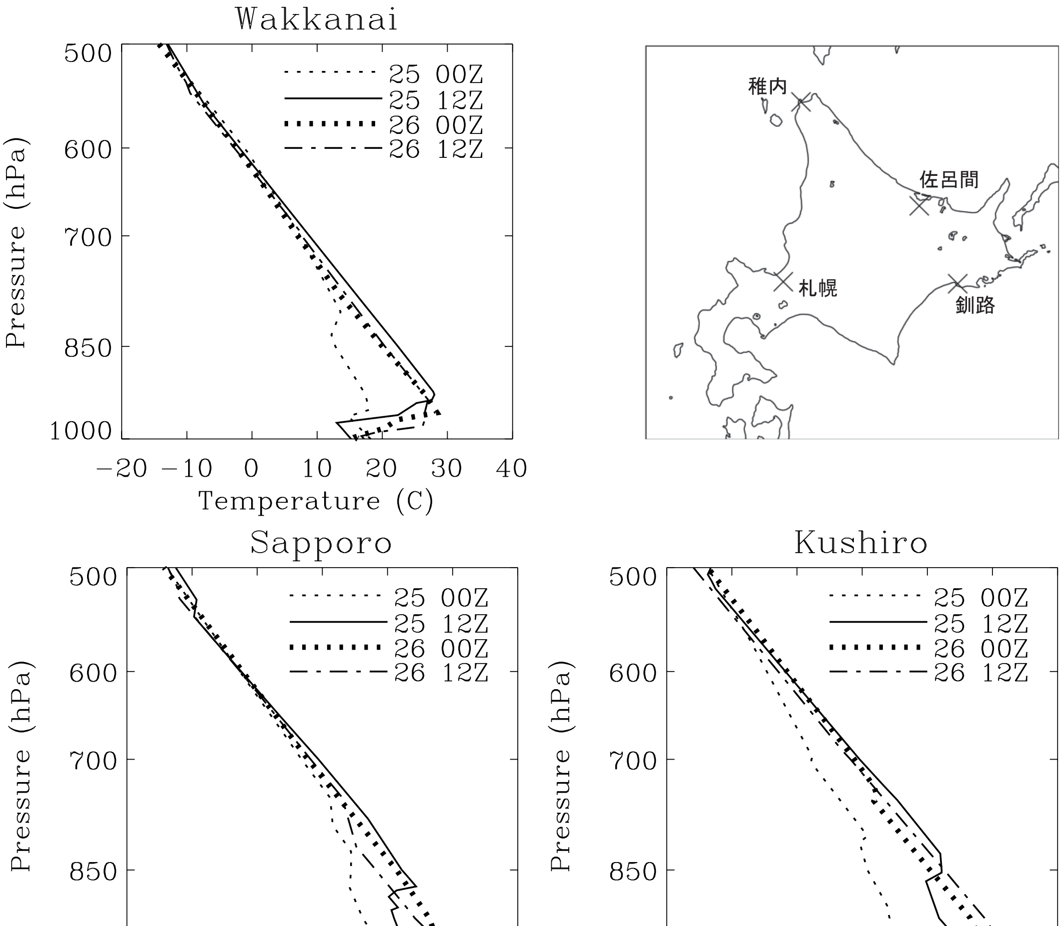


図 1: 稚内、札幌、釧路における気象庁のラジオゾンデ観測で得られた気温 (°C) の高度分布 (Wyoming 大学の公開しているデータに基づいて作図)。2019 年 5 月 25 日と 26 日の日本時間 9 時 (00Z) と 21 時 (12Z) の観測結果を示す。細い点線: 25 日 9 時 (00Z)、実線: 25 日 21 時 (12Z)、太い点線: 26 日 9 時 (00Z)、一点鎖線: 26 日 21 時 (12Z)。

3 地点とも、25 日の 00Z から 12Z にかけて 700 hPa より下の下部対流圏で急激な温度上昇が見られ、地表面のすぐ上に顕著な $\boxed{\text{(a)}}$ を形成している。900 hPa 付近の高度に注目すると、3 地点のうち $\boxed{\text{(b)}}$ では 25 日 12Z に昇温のピークに達しているが、他の 2 地点ではその後も昇温が続き、$\boxed{\text{(c)}}$ では 26 日 12Z まで昇温が継続している。$\boxed{\text{(b)}}$ 以外の 2 地点では、25 日 12Z の温度分布に地表面付近とは別の $\boxed{\text{(a)}}$ が認められ、この特徴は、昇温の位相の下方伝播を示唆するようにも見える。昇温時の鉛直温度減率は 3 地点でほぼ等しく、地表面で 30°C、500 hPa 面の高度を 5 km として概算するとその値は $\boxed{\text{(d)}}$ となり、$\boxed{\text{(e)}}$ に近い値となっている。したがって、$\boxed{\text{(f)}}$ は鉛直方向にほぼ一定値を取っているはずである。

問 2 図 2 は、2019 年 5 月 25 日の日本時間 9 時 (00Z) と 21 時 (12Z) の、850 hPa 面におけるジオポテンシャル高度 (m) と気温 (°C) の水平分布である。北緯 45 度、東経 140 度の格子点を P とする。以下の問に答えよ。ただし、t は時間、x は東向きを正にとった東西方向の座標、y は北向きを正にとった南北方向の座標である。

(a) 図 2 から得られる 850 hPa 面上の気象場の情報から、図 1 のラジオゾンデ観測で得られた昇温の原因としてどんなことが考えられるか。簡潔に説明せよ。

(b) 図 2 から 5 月 25 日 00Z の点 P 付近のジオポテンシャル高度 Z の値を読み取り、その値を用いて

$$u_{\rm g} = -\frac{1}{f}\frac{\partial \Phi}{\partial y}$$

と表される地衡風の東西成分 $u_{\rm g}$ を求めよ。ここで、f はコリオリパラメーターで、ジオポテンシャル Φ とジオポテンシャル高度 Z とは、平均海面高度における重力加速度の大きさの全球平均値 $g_{\rm s}$ を介して $\Phi = g_{\rm s}Z$ の関係を満たす。計算を簡単にするため、$g_{\rm s} = 10\ {\rm m\ s^{-2}}$、$f = 10^{-4}\ {\rm s^{-1}}$、子午線に沿った距離を緯度 1 度につき 100 km とし、図から読み取った値および途中の計算を省略せず、有効数字 1 桁で解答せよ。

(c) 図 2 から 5 月 25 日 00Z の点 P 付近の東西温度勾配を読み取り、(b) で求めた $u_{\rm g}$ を用いて、風速 $u_{\rm g}$ の東西風による温度移流がもたらす温度 T の局所時間変化率

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -u_{\rm g}\frac{\partial T}{\partial x}$$

を概算せよ。必要なら北緯 45 度の緯度円に沿った距離を経度 1 度につき 70 km とし、図から読み取った値および途中の計算を省略せず、有効数字 1 桁で解答せよ。

(d) (c) で得られた結果を図 1 の稚内における 25 日 9 時から 21 時までの温度変化と比較し、(a) で解答した説明の妥当性を考察せよ。

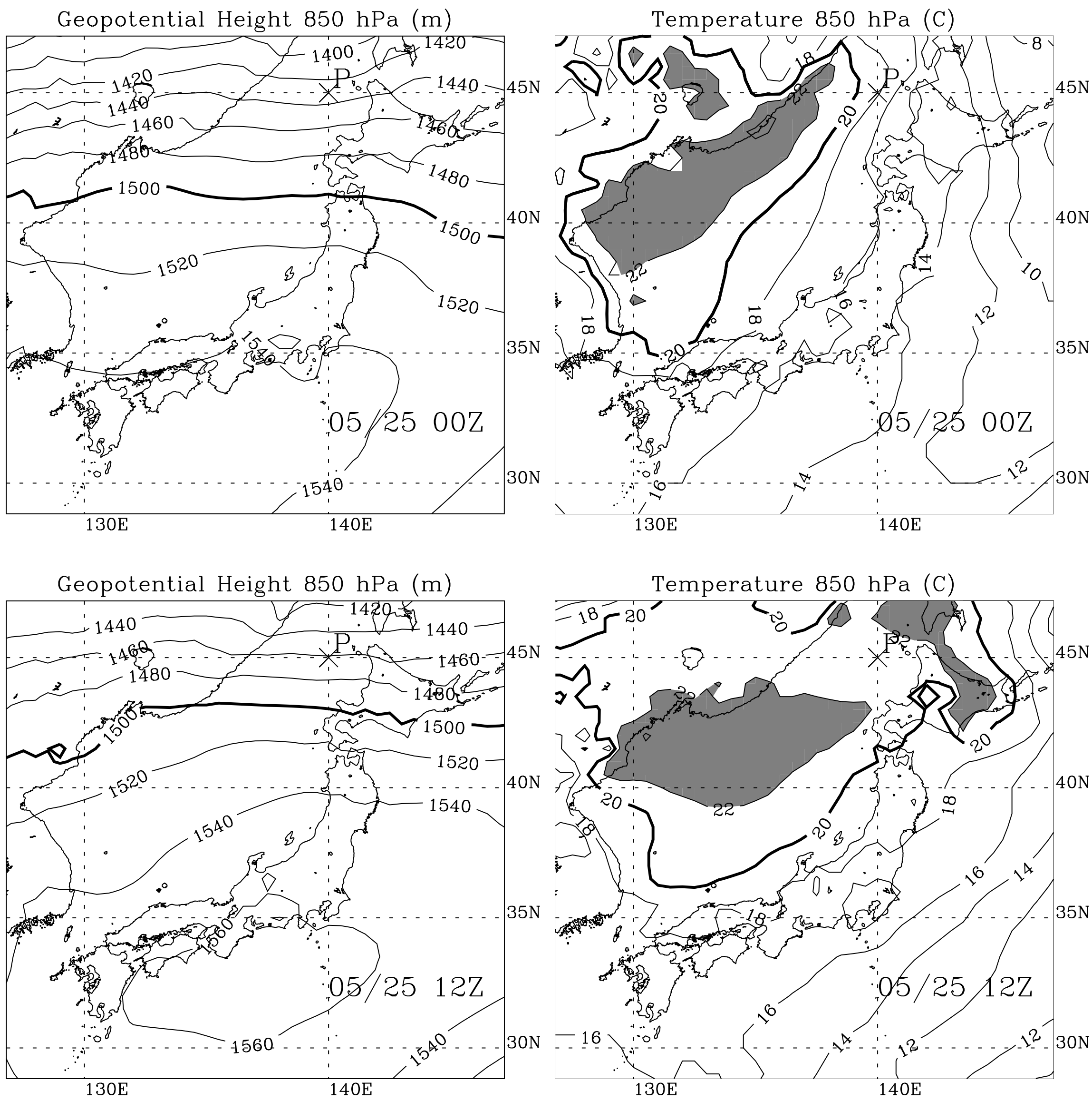


図 2: 2019 年 5 月 25 日の (上段) 日本時間 9 時 (00Z) と (下段) 同 21 時 (12Z) の、850 hPa 面における (左) ジオポテンシャル高度 (m) と (右) 気温 (°C) の水平分布。高度場については 1500 m の等値線を太線で、温度場については 20°C の等値線を太線で示し、陰影は 22°C より高温の領域を表す。NOAA の GFS 解析値を用いて作図。

問題 8 ：選択問題・地球物理学

海洋における流れに関する以下の問に答えよ。

問 1 地衡流の関係において釣り合っている 2 つの力を答えよ。

問 2 海面での流れがほぼ地衡流と近似できるとする。北半球において海面で東向きの流れがあるとき、水位の勾配はどの向きにどうなっているか答えよ。また同様に、南半球で北向きの流れがあるとき、水位の勾配はどうなるか答えよ。

問 3 北半球で海面を東向きの風が吹いているとき、海面付近の境界層全体で積算した流れはどちら向きになるか答えよ。また赤道付近で西向き、中緯度で東向き (図 1 左図) の風が吹いているとき、赤道と中緯度の間で海面付近の水平流は発散するか、収束するか、どちらになるか答えよ。

問 4 北半球の、周囲を陸で囲まれた海底の平らな四角い海洋において、図 1(左図) のような風が吹いているとき、コリオリパラメーターが緯度によって変化しないと考えてよい場合と緯度によって現実的に変化する場合のそれぞれについて、地衡流の分布はどのようになるか? 解答用紙にそれぞれの場合について図 1(右図) のような枠を描き、その上に両者の違いが分かるように流れの分布の概略を示せ。またそのような違いが生じる理由を説明せよ。

問 5 実際の海洋の流れを測るにはどのような方法があるか? 海洋観測で用いられている方法のうちオイラー的手法とラグランジュ的手法の例をそれぞれひとつ挙げ、それらの測定手法を説明せよ。

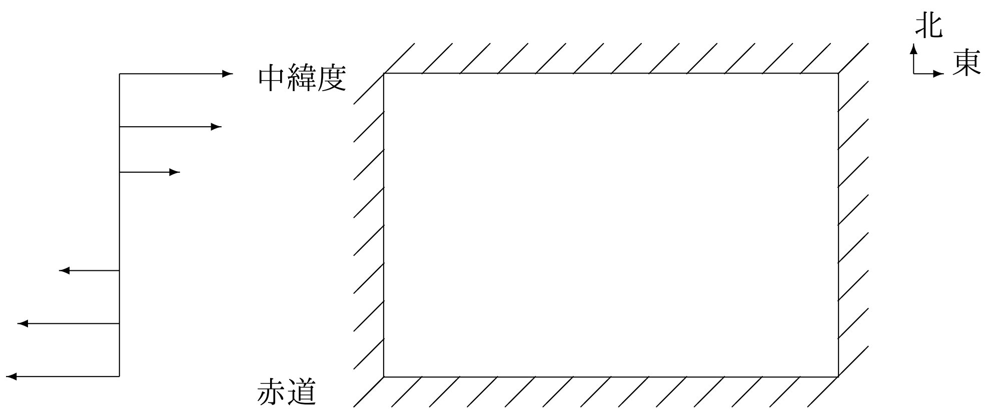


図 1: 海上風の緯度分布（左図）と海底の平らな四角い海洋（右図）

問題 9： 選択問題・地球物理学

以下の 6 問の中から 2 つを選び、それぞれ 300 字程度で答えよ。式や図を用いてもよい。

(1) フェーン現象とは何か。どのような条件のもとで発生し、どのような結果をもたらすかを述べるとともに、メカニズムについて説明せよ。

(2) 飽和水蒸気圧とは何か、説明せよ。また、飽和水蒸気圧を決める変数を全て挙げ、その変数に対する依存性がどんな特徴をもつか述べよ。

(3) 上空の風を観測する方法を 3 つ挙げ、観測原理と測定できる高度範囲について簡潔に説明せよ (それぞれの手法につき 100 字程度)。

(4) 地球温暖化に伴い近年の平均海水位上昇を引き起こしている主な要因は 2 つある。その要因を挙げ、それを推定する手法も含めて説明せよ。

(5) 波浪と津波はそれぞれどのような波か、どのような点が類似しており、どのような点が異なるのか、その成因を含めて説明せよ。

(6) 海氷と氷山の違いについて説明せよ。また北極海と南極海（南大洋）におけるそれぞれの分布や特徴について述べよ。