北海道大学大学院環境科学院
地球圏科学専攻
大気海洋物理学・気候力学コース

令和２年度大学院修士課程入学試験問題
専門科目

数学・物理学 (古典物理学) より計４問出題されている。その全てに解答すること。１ 問につき １ 枚の解答用紙を使用し、解答用紙には問題番号を記入すること。

令和２年２月

専門・問題 1

問 1 直交直線座標系 (x, y, z) における、スカラー関数 $\phi = \sin x \cos y \sin z$ とベクトル関数 $\boldsymbol{a} = (ze^y, -ze^x, 2ye^x)$ に関して、以下を求めよ。

(a) $\nabla\phi$

(b) $\nabla \cdot \boldsymbol{a}$

(c) $\nabla \times \boldsymbol{a}$

問 2 次の不定積分を求めよ。

(a) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+1} dx$

(b) $\displaystyle\int xe^{2x} dx$

問 3 $z^3 = 8i$ を満たす複素数 $z = a + ib$ を求めよ。ただし、a, b は実数、i は虚数単位である。

問 4 行列 $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めよ。

専門・問題２

問１ 質量 m の質点と質量 M の月との間にはたらく万有引力を考える。万有引力ポテンシャル U は

$$U = -Gm\frac{M}{r},$$

と書くことができる。ここで G は万有引力定数、r は質点と月の中心との距離である。また、月の半径を R として、自転の効果は無視できるものとする。このとき、以下の問に答えよ。

(a) 質点と月との間にはたらく万有引力の大きさを求めよ。

(b) 月の表面（$r = R$）での重力加速度の大きさを求めよ。

(c) 質点が、月の表面から初速 v で鉛直に打ち出された。このとき、質点の最高到達点の、月の表面からの高さを求めよ。また、質点が月から脱出するための初速 v の条件は、どのようなものか。

問２ 図１のように、質量 M、長さ L の一様な細い棒の一端を床上の点Aを支点として回転できるように留める。重力加速度の大きさを g として、以下の問に答えよ。

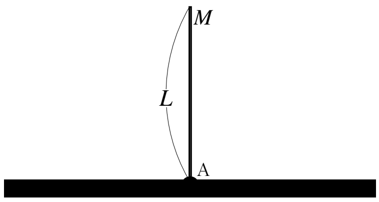

図１

(a) 点Aまわりの棒の慣性モーメント I を求めよ。

(b) はじめに棒を直立させる。このときの棒の位置エネルギーの大きさを求めよ。ただし、床上に棒をねかせたときの棒の位置エネルギーをゼロとする。

(c) 図２のように棒は直立の状態からやがて倒れはじめた。棒が床につく直前の点Aまわりの回転角速度を求めよ。

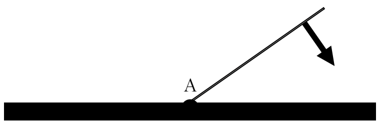

図２

専門・問題３

問１ 1階線形微分方程式

$$y' + f(x)y = g(x), \quad y' = \frac{dy}{dx} \tag{1}$$

の一般解は、C を定数として

$$y = \{e^{-\int f(x)dx}\} \left\{ \int g(x)[e^{\int f(x)dx}]dx + C \right\} \tag{2}$$

である。

(a) (2) が (1) の解であることを、(2) を (1) に代入して示せ。

(b) $y' + 2y = 5e^{3x}, \quad y(0) = 1$ を解け。

(c) $y' - (1/x)y = -1, \quad y(1) = 0$ を解け。ただし、$x > 0$ とする。

問２ 以下の形の微分方程式 (3) はクレローの微分方程式と呼ばれ、両辺を x で微分して整理し、元の式に代入して一部の積分定数を決めるなどすると、積分定数を含む一般解と、積分定数をどのように選んでも得られない特異解とが求まる。

$$y = xy' + f(y'), \quad y' = \frac{dy}{dx} \tag{3}$$

以下の微分方程式を上に述べた方法で解き、一般解と特異解を同一の座標平面上に図示せよ。なお、特異解のグラフは一般解のグラフの包絡線となる (一般解のグラフすべてが特異解のグラフに接する) 。

$$y = xy' + (y')^2$$

専門・問題 4

一定のばね定数をもち、質量を無視できるばねを用意する。水平面と 30 度の角度をなす斜面上で、このばねの上端を固定し、下端に質量 m の小球を付ける。重力加速度の大きさを g として、以下の問に答えよ。

問 1 摩擦を無視できる滑らかな斜面上では、図 1 のように、ばねは元の長さから l_0 だけ伸びて静止した。ばね定数を求めよ。

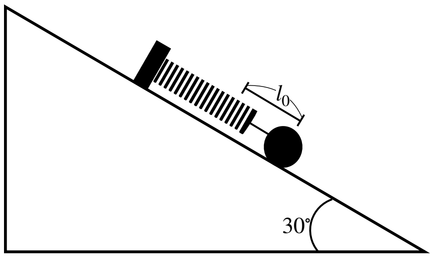

図 1

問 2 次に、摩擦のある斜面上で、問 1 で用いた同じばねの上端を固定して、下端に質量 m の小球を付ける。図 2 のように、小球を斜面に沿ってばねの元の長さから $l_0 + a_0$ の位置まで手で引き延ばしたあとの運動を考える。この斜面と小球との間の静止摩擦係数を μ、動摩擦係数を μ' とする。

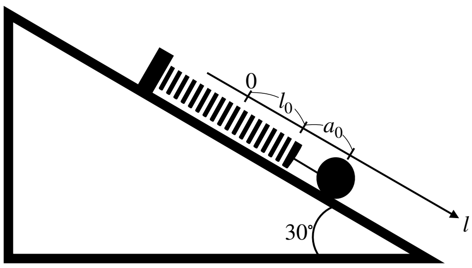

図 2

(a) 小球から手を離した直後に、ばねが縮み小球は動きはじめた。このときの a_0 の条件を求めよ。

(b) 斜面に沿って下向きに座標 l をとり、この座標の原点をばねが元の長さにあるときの下端の位置にとる。ばねが縮みつつあるときの小球の運動方程式を l に関する微分方程式の形で書け。

(c) やがてばねは l_0 よりも縮み、小球はいったん静止した。ばねが縮み始める最初の時刻を $t = 0$ として (b) で答えた運動方程式を解き、小球が静止した時刻 t_1 と、そのときの小球の座標 l_1 を求めよ。