

北海道大学大学院環境科学院
地球圏科学専攻
大気海洋物理学・気候力学コース

令和4年度大学院修士課程入学試験問題
専門科目

問題1と2は必答問題、問題3~9は選択問題である。必答問題2問は必ず解答すること。選択問題は、数学2問・物理学2問・地球物理学3問、計7問出題されている。その中から2問を選択し、解答すること。1問につき1枚の解答用紙を使用し、解答用紙には問題番号を記入すること。

令和3年8月

問題1：必答問題

問1 3次元空間における位置ベクトルを \mathbf{r} 、任意の定ベクトルを \mathbf{a}, \mathbf{b} とするとき、次の (a)~(c) を求めよ。

(a) $\nabla \{\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{r})\}$

(b) $\nabla \times \{(\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{b}\}$

(c) $\nabla |\mathbf{r}|^2$

問2 行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めよ。

問3 以下を求めよ。

(a) $\int x^5 \log x \, dx$

(b) $\int_C \frac{(x, y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot (dx, dy)$

ただし、積分路 C は直交直線座標系 (x, y) における、原点を中心とする半径1の円。ドットは内積を表す。

問4 以下の微分方程式を解け。

(a) $\frac{dy}{dx} + xy = 0$

(b) $\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + 2y = \cos x - 2\sin x, \quad y(0) = 1, \quad \frac{dy}{dx}(0) = 1$

問題 2 : 必答問題

問 1 子供がボールを壁にぶつけて遊んでいる。壁は水平面に対して垂直に立っている。子供と壁の距離は L 、重力加速度の大きさは g 、ボールの質量は m 、ボールと壁の反発係数は 1、壁面は滑らかであり、また、空気抵抗は働かないとする。子供はボールを速さ v_0 で、水平面から 45° の角度で投げ、ボールは子供が投げた高さより高い位置で壁に当たったとする。

(a) 壁は固定されていて動くことはないとする。壁にボールをぶつけた時の以下のものを求めよ。

- i. 子供の位置を $x = 0$ 、壁の位置を $x = L$ とした時のボールが子供が投げた高さまで落ちてきた場所の x 座標
- ii. ボールが壁に与えた力積
- iii. ボールが壁にした仕事

(b) 壁が速度 U でゆっくりと子供から遠ざかる方向に移動していた。ボールが当たっても、壁の速度に変化はないとする。壁にボールをぶつけた時の以下のものを求めよ。

- i. ボールが壁に与えた力積
- ii. ボールが壁にした仕事

問 2 球、円柱、中空の円筒が坂を滑らずに転がり落ちる。加速度の大きさの順を、その理由を含めて述べよ。なお、円柱と球は内部に空洞はなく、一様な物質で作られているとする。

問 3 断熱容器に温度 T_i (K) の氷と温度 T_w (K) の水をそれぞれ質量 M_i (kg) と M_w (kg) 入れて密閉した。以下では、氷と水の比熱をそれぞれ C_i ($\text{J kg}^{-1} \text{K}^{-1}$) と C_w ($\text{J kg}^{-1} \text{K}^{-1}$)、氷の融解熱を L (J kg^{-1})、結氷温度を T_0 (K) とし、簡単のため過冷却や気化は無視する。

(a) 密閉後温度が一様になるまで待った。この時、全てが氷となる条件を不等式で表せ。

(b) 温度が一様になった後、断熱容器の一側面を面積 S (m^2) の熱板に替え、単位面積当たりの熱フラックス F_h (W m^{-2}) を時間 τ (s) 加えたところ、氷は全て解けて水となった。最終的な水温 T_f (K) を求めよ。

問題3：選択問題・数学

下図のように、点Sを自動車で出発して、1800 m先の点Gまで一定の速さ 15 m s^{-1} で走る。途中、点Sから、600 mと1200 mの距離にある点Aおよび点Bに信号が設置されている。点Aの信号は60秒間青信号、次の60秒間赤信号を繰り返している（黄色信号の時間は無視する）。同様に、点Bの信号は40秒ごとに青信号、赤信号を繰り返している。自動車は、点Aおよび点Bに達した時に、その点にある信号が赤であれば、青に変わるまで停車するものとし、停車や発車の際の減速や加速に要する時間は無視する。また、信号が青から赤に変わるのと同時にその点に到達した場合は、信号が青に変わるまで停車する。以下の問に答えよ。結果だけでなく、導出の過程も記すこと。

- 問1 時刻 $t = 0 \text{ (s)}$ で、点Aおよび点Bの2つ信号が同時に赤から青へ変わった。この次に2つの信号が同時に赤から青へ変わるのは何秒後か。
- 問2 時刻 $t = 30 \text{ (s)}$ に点Sを発車した自動車が点Gに到着するまでに要する時間を求めよ。
- 問3 任意の時刻に点Sを出発した自動車が点Gに到着するまでに要する時間の最大値は何秒か。
- 問4 任意の時刻に点Sを出発した自動車が、一度も信号で停車することなく点Gに到着する確率を求めよ。
- 問5 任意の時刻に点Sを出発した自動車が、点Gに到着するまでに要する時間の期待値を、有効数値3桁で求めよ。

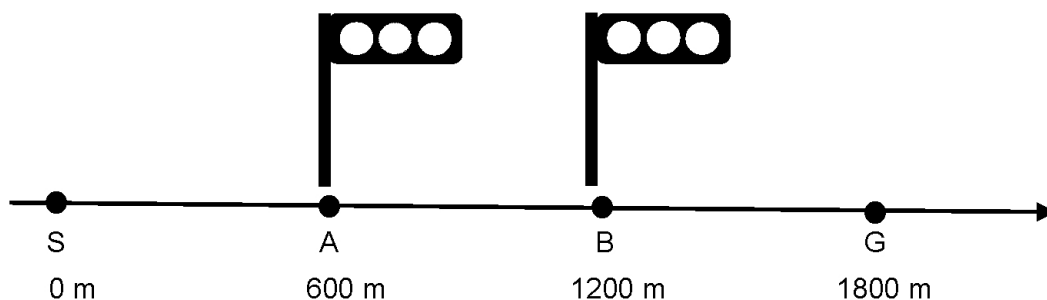


図:

問題4：選択問題・数学

膜などの振動を表す方程式に

$$\Delta F + F = 0 \quad (1)$$

がある。 Δ は2次元のラプラシアンである。 r を原点からの距離、 θ を方位角とする2次元極座標では、 $\Delta F = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial F}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2}$ である。これについて以下の問に答えよ。

問1 m を任意の整数として、 $F(r, \theta) = f(r) \cos m\theta$ が式 (1) に従う場合、 f についての微分方程式が

$$\frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{df}{dr} + \left(1 - \frac{A}{r^2} \right) f = 0 \quad (2)$$

の形で表されることを示し、定数 A を求めよ。

問2 収束し項別微分可能な級数 (3) で表される0次のベッセル関数 J_0 は、 $m=0$ のときの式 (2) を満たすことを示せ。

$$J_0(r) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \left(\frac{r}{2} \right)^{2k} \quad (3)$$

問3 $J_0(r)$ は $r > 0$ で可算無限個のゼロ点 (値が0になる r 軸上の点) r_i を持つ ($i = 1, 2, 3, \dots$)。

(a) $r = r_i x$ の変数変換により次の式を導き、定数 c を答えよ。

$$\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \left(x \frac{dJ_0(r_i x)}{dx} \right) + c J_0(r_i x) = 0$$

(b) i, j が異なる自然数のとき、次の式が成り立つことを示せ。

$$\int_0^1 x J_0(r_i x) J_0(r_j x) dx = 0 \quad (4)$$

問4 ある関数 $f(x)$ が

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i J_0(r_i x) \quad (5)$$

と表されるとする。式 (4) を用いて、定数 c_i を、 f および $a_i \equiv \int_0^1 x (J_0(r_i x))^2 dx$ を使って表わせ。

問題 5 : 選択問題・物理学

宇宙エレベータは、静止軌道上のステーションと地表をワイヤで繋ぎ、そのワイヤを伝って宇宙に出ていくという装置である。ワイヤに質量があるので、ステーションの外側にもワイヤを伸ばす必要がある。ワイヤは赤道上の地表から地表面に直交する方向へ一直線に伸び、その状態を保ったまま地球の自転角速度で回転する。地球中心を原点とし、ワイヤに沿う方向に r 軸を取る。地球の自転角速度を Ω 、地球半径を R 、静止軌道の地球中心からの距離を r_s 、ワイヤの線密度を一定値 σ 、地球表面でのワイヤの張力の値を T_0 とする。

- 問 1 万有引力定数を G 、地球質量を M としたとき、 GM を Ω と r_s で表わせ。
- 問 2 宇宙エレベータのワイヤの微小部分にかかる力の釣り合いから、ワイヤの張力 $T(r)$ に関する微分方程式 (dT/dr に関する式) を導け。なお、この式では G と M を用いないこと。
- 問 3 張力 $T(r)$ を求めよ。また、ワイヤの外側の端点で張力が満たすべき条件から、その端点の位置 r_{\max} を決定する方程式を導け (解く必要はない)。
- 問 4 ワイヤを伝ってゴンドラが静止軌道に向かって高速で上昇していく時に、乗客が感じるであろう、ワイヤに直交する方向の力について論ぜよ。

問題6：選択問題・物理学

変位が $D = A \sin(kx - \omega t)$ と表される横波を考える。 A, k, ω は正の定数とする。以下の問に答えよ。

- 問1 この波の波長、周期、波の山と谷が進む向きと速さを答えよ。
- 問2 時刻 $t = 0$ のとき、波に伴う媒質の変位と速度、および波に伴う復元力を互いの位相関係が分かるように図示せよ。図示においては振幅について考慮しなくてよい。
- 問3 問2の図を基に、波に伴う媒質の変位と速度、復元力と変位、速度と復元力の関係を用いて、波の山や谷が問1で答えた向きに進む仕組みを述べよ。
- 問4 変位が $D_1 = A \sin(k_1x - \omega t)$ と $D_2 = A \sin(k_2x - \omega t)$ の2つの波を重ね合わせた。 k_1 と k_2 の大きさがそれぞれ $7/6$ と $5/6$ のとき、どのような形状の波になるか。式で示し、 $t = 0$ の時の形状の概略を縦軸を変位、横軸を x として図示せよ。また $t > 0$ での時間変化の概略を説明せよ。
- 問5 変位が $D_1 = A \sin(k_1x - \omega_1t)$ と $D_2 = A \sin(k_2x - \omega_2t)$ の2つの波を重ね合わせた。 k_1 と ω_2 の大きさが $7/6$ 、 k_2 と ω_1 の大きさが $5/6$ のとき、 $t > 0$ での時間変化の概略を式も用いて説明せよ。

問題7：選択問題・地球物理学

図は、1月の海面の蒸発量、海面水温、海上風の分布を示す。以下の問に答えよ。

問1 蒸発が大気と海洋に与える影響について、それぞれ100字程度で答えよ。

問2 次の3つの問に答えよ。

- (a) 海上での現場観測から蒸発量を求める際、どのような物理量の観測値が必要か。次の物理量の中から最も重要となる物理量を3つ選べ。気圧、観測高度は既知とする。
(大気密度, 海上風速, 風向, 日射量, 気温, 海面水温, 比湿, 雲量, 降水量)
- (b) 図の Box. A では 7 mm day^{-1} を超える蒸発量の特徴的な分布がある。この海域における大気と海洋のそれぞれの気候学的な場の特徴を説明した上で、それらが、(a) で答えた3つの物理量と蒸発量の分布にどの様に影響するかを述べよ (100~200字程度)。
- (c) 図の Box. B と C を比較すると、蒸発量が大きいののは Box. B である。その理由を (a) で答えた3つの物理量、および大気と海洋の気候学的な場の特徴の違いを解説しながら説明せよ (100~200字程度)。

問3 海洋域全体における年平均蒸発量は 3.7 mm day^{-1} であった。次の3つの問に答えよ。

- (a) 同様に海洋域全体における年平均降水量が観測された場合、年平均蒸発量の値と比較し、どちらが大きいかを明示して、その理由と共に答えよ (100字程度)。
- (b) 年平均蒸発量の値に基づき、単位時間、単位面積あたりで蒸発に伴って輸送される熱量 (W m^{-2}) を計算し答えなさい。ただし水の蒸発の潜熱は 2.5×10^6 (J kg^{-1}) とする。
- (c) 海面では、蒸発以外に主に3つのプロセスによって熱交換がある。それぞれ、どのようなプロセスかを端的に説明せよ (合わせて100字程度)。

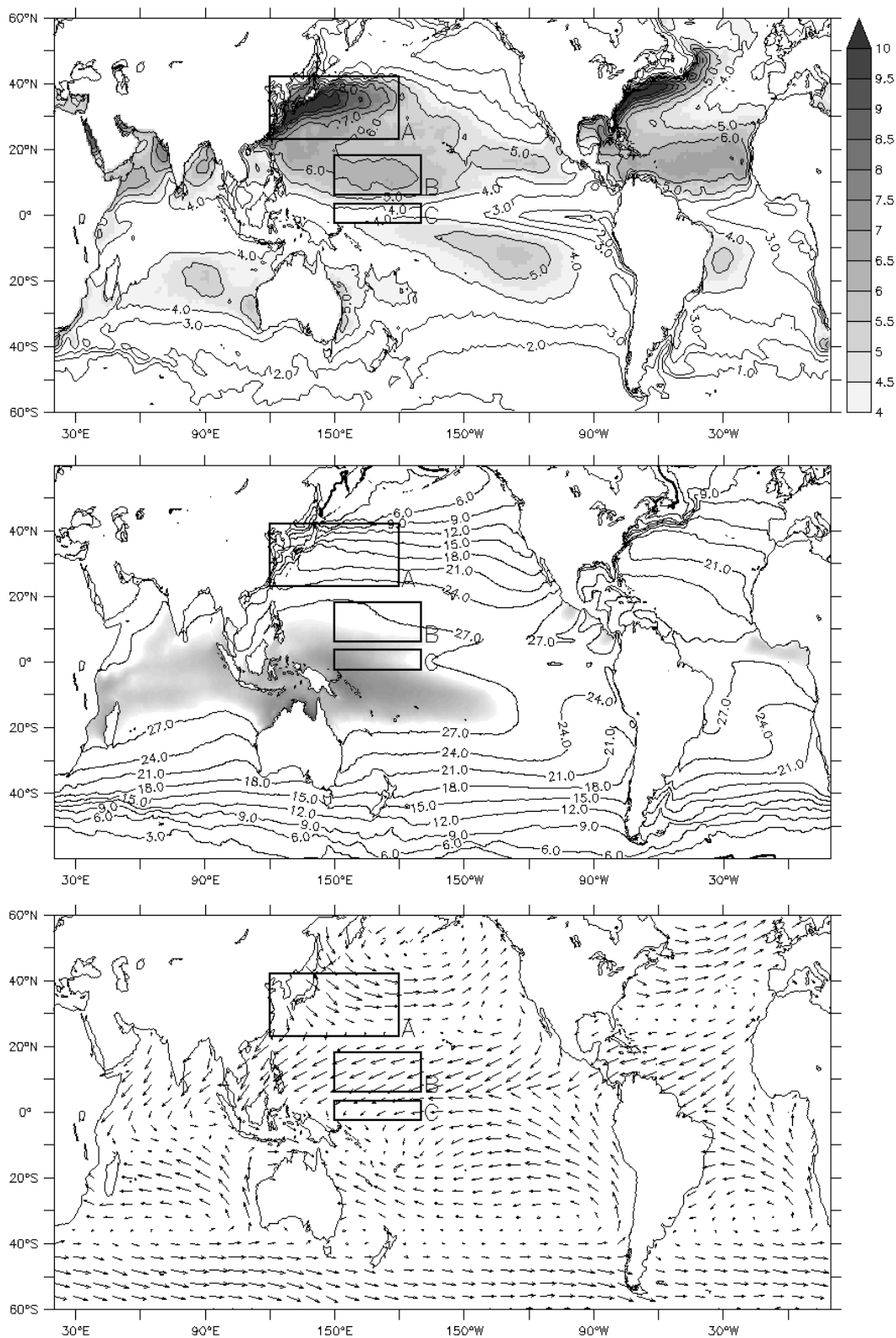


図: (上段) 蒸発量 (単位は mm day^{-1} 、 4 mm day^{-1} 以上の値には濃淡がつけられている)。(中段) 海面水温 (単位は $^{\circ}\text{C}$ 、 28°C 以上の海域に濃淡がつけられている)。(下段) 海上風ベクトル (矢印)。使用データ: J-OFURO3 V1.1、気候学的月平均値 (1月)。

問題 8 : 選択問題・地球物理学

図 1 と図 2 は、それぞれ太平洋と大西洋の中央部を南北に横切る測線（図 3 の実線）における、水温 (a) と塩分 (b) の鉛直分布を示したものである。以下の問に答えよ。図を用いて説明してもよい。

- 問 1 表層の塩分には亜熱帯域から高緯度域にかけてどのような特徴があるか。その特徴が生ずる理由と合わせて 50~100 字程度で述べよ。
- 問 2 深さ 200~500 m あたりの水温・塩分の等値線を見ると、赤道付近は上に凸、亜熱帯域は下に凸の特徴を示している。このような構造を示すメカニズムを 120~240 字程度で説明せよ。
- 問 3 太平洋・大西洋とも 2000 m 以深はほとんどが 3°C 以下の低温の水で占められている。このように深層全域が低温に維持されているのはなぜか、50~100 字程度で説明せよ。
- 問 4 深層が低温に維持されることに関して、北太平洋と北大西洋の違いを、塩分に着目して 100~200 字程度で説明せよ。
- 問 5 図の中で最も低温の水が分布しているのはどこか。また、この低温の水がどのようにして形成されるかを説明し、この低温水の海洋大循環における位置づけについても述べよ（合わせて 100~200 字程度）。

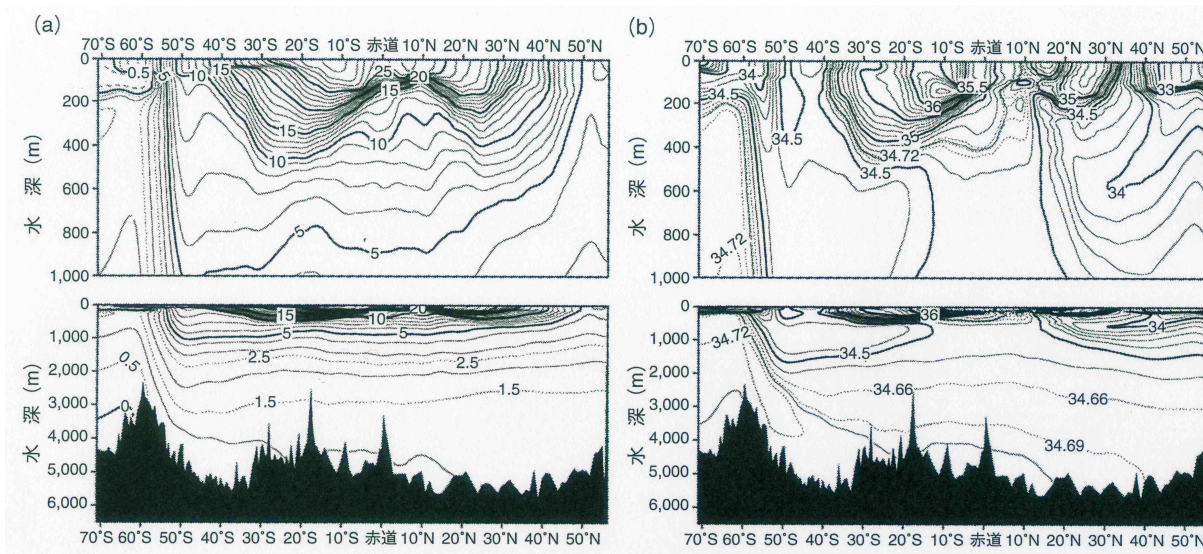


図1: 太平洋を南北に横切る測線 (図3 (C1) の実線) における、水温 (a) と塩分 (b) の鉛直分布。

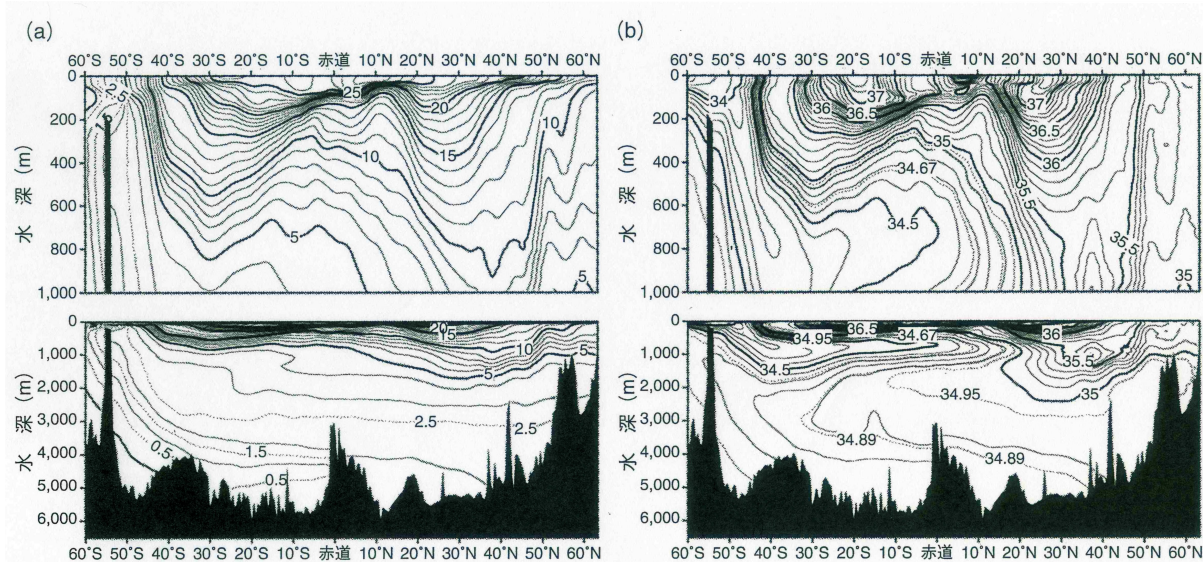


図2: 大西洋を南北に横切る測線 (図3 (C2) の実線) における、水温 (a) と塩分 (b) の鉛直分布。

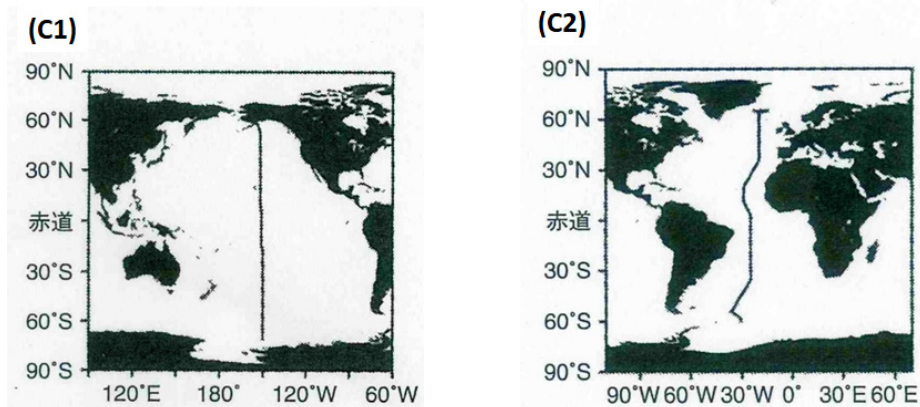


図3: 太平洋 (C1) と大西洋 (C2) の南北測線での断面図がそれぞれ図1、図2に示されている。
(出典：海洋の物理学：花輪公雄著 共立出版より)

問題9：選択問題・地球物理学

以下の6問の中から2つを選び、それぞれ300字程度で答えよ。式や図を用いてもよい。

- (1) 「大気の川」とは何か。またその発生の仕組みについて説明せよ。
- (2) 台風と海洋の相互作用の仕組みについて説明せよ。
- (3) 地球温暖化時に考えられる気候フィードバックについて、正と負のフィードバックを1例ずつ挙げて説明せよ。
- (4) 2つの水塊が上下に接している時に生じるソルトフィンガーという現象の仕組みを説明せよ。
- (5) 海氷が、ある海域で多量に生成され、それが移動して別の場所で融解すると、海洋の熱塩収支や海洋中深層循環にどのような影響を与えうるか、説明せよ。
- (6) 潮汐を引き起こす力を起潮力という。月と地球の関係において、起潮力が生ずる仕組みと、それによってどのように潮汐が生ずるかを説明せよ。