北海道大学大学院環境科学院
地球圏科学専攻
大気海洋物理学・気候力学コース

令和５年度大学院修士課程入学試験問題

専門科目

数学・物理学 (古典物理学) より計４問出題されている。その全てに解答すること。１ 問につき １ 枚の解答用紙を使用し、解答用紙には問題番号を記入すること。

令和５年２月

専門・問題 1

問 1 行列 $A = \begin{pmatrix} 3i & -3 \\ 1 & 5i \end{pmatrix}$ について、以下の問に答えよ。ただし、i は虚数単位とする。

(a) A の固有値 λ_1, λ_2 およびそれぞれに対応する固有ベクトルを求めよ。

(b) $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ を満たす正則行列 P およびその逆行列 P^{-1} を求めよ。

問 2 次の微分方程式を解け。

(a) $\dfrac{dy}{dx} = 6x^2 y$

(b) $\dfrac{dy}{dx} + 2y = 4\cos x$

問 3 次の方程式を満たす複素数 z を全て求め、$z = a + bi$ の形で記せ。ただし、a, b は実数、i は虚数単位とする。

$z^4 = 4$

専門・問題 2

問 1 図 1 のように、質量の無視できる長さ l の糸の一端を天井からつるし、もう一端に質量 m の小球をつけ、糸と鉛直方向との角度を θ に保ちながら、水平面内で小球を等速円運動させる。重力加速度の大きさを g として、以下の問に答えよ。

(a) 小球の等速円運動の角速度 ω を求めよ。

(b) $\theta = 0$ から徐々に角度を大きくして、それぞれの θ で小球を等速円運動させたところ、$\theta = \dfrac{\pi}{3}$ のとき糸が切れた。糸の張力の最大値を求めよ。

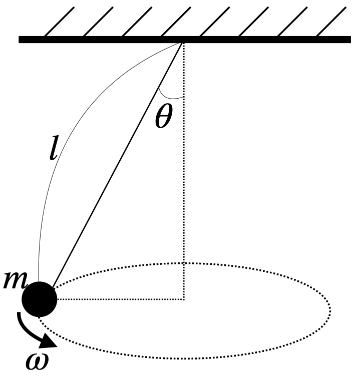

図 1:

問 2 図 2 のように、ばね定数 k、自然長 l_0 のばねの左端と右端にそれぞれ質量 m_1 の小球 A と質量 m_2 の小球 B をつけ、滑らかな水平面に置く。ばねの両端を引き、ばねの長さを自然長から L $(< l_0)$ 伸ばしたあとに手を離したところ、ばねは振動した。二つの小球を結ぶ直線の方向に x 軸をとる。以下の問に答えよ。

(a) 時刻 t における小球 A と小球 B の位置の座標をそれぞれ $x_1(t), x_2(t)$ として、小球 A と小球 B の運動方程式を書け。

(b) 自然長からのばねの伸びを $x(t)$ とし、ばねの振動の角振動数を求め、$x(t)$ を式で表せ。

(c) $x(t)$ の概形を、横軸に時刻 t、縦軸に $x(t)$ をとり描け。

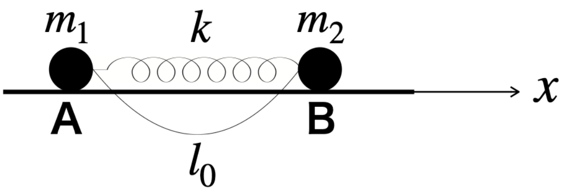

図 2:

問 3 地球大気のほとんどは窒素分子と酸素分子で構成され、この他わずかに二酸化炭素や水蒸気などの気体を含む。窒素、酸素、水素の原子量をそれぞれ、14、16、1 として以下の問に答えよ。なお、気体はすべて理想気体とみなしてよいこととし、標準状態（1 気圧、0°C）で 1 mol の理想気体のしめる体積を 22.4 L（1 L=0.001 m^3）とする。

(a) 地球大気は窒素分子と酸素分子のみから構成されるとし、その mol 比を 4 : 1 とする。標準状態におけるこの大気の密度を kg m^{-3} の単位で求めよ。

(b) 標準状態で、窒素分子と酸素分子の mol 比を 4 : 1 に保ちながら、水蒸気のみを全体の 1 %の mol 比で混合させる。大気の密度は **(a)** で求めた密度と比べて増加するか減少するか。理由を含めて 2 行以内で答えよ。

専門・問題 3

直交直線座標系 $(x,\, y,\, z)$ におけるベクトル関数 $\mathbf{A} = (e^x,\, y^2,\, z^2 x)$ と $\mathbf{B} = (y,\, \cos z,\, \sin x)$ について、以下の問に答えよ。

問 1 以下を求めよ。

(a) $\nabla \cdot \mathbf{A}$

(b) $\nabla \times \mathbf{B}$

問 2 辺の長さが 1 で、原点および 3 点 $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$ を頂点に持つ立方体を考える。立方体の表面を S、面に垂直で外向きの単位法線ベクトルを $\mathbf{n}$、体積を V とする。このとき次の等式について、左辺の面積分と右辺の体積分をそれぞれ求め、等式（ガウスの定理）が成り立っていることを示せ。

$$\iint_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}\, dS = \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{A}\, dV$$

問 3 平面 $z = 0$ 上における、原点を中心とする半径 r の円を考え、その周を C、面積を S とする。このとき次の等式について、左辺の線積分と右辺の面積分をそれぞれ求め、等式（ストークスの定理）が成り立っていることを示せ。

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{n}\, dS$$

専門・問題 4

以下の問に答えよ。

問 1 音波のドップラーシフトに関する以下の文章の $\boxed{(1)}$ から $\boxed{(8)}$ の空欄を埋めよ。

図 1 のように、観測者が静止しており、音源が観測者に向かって速さ v で近づいている場合を考える。音速を c とし、音源からは振動数 f の音が出ているとする。また、$v \ll c$ とする。時刻 0 に点 O にいた音源が放った音は、時刻 t には、$\boxed{(1)}$ の距離だけ広がり、音源は、$\boxed{(2)}$ だけ動く。この間に $\boxed{(3)}$ 回の振動が起こっているので、音源の前方での波長 λ は、$\lambda = \boxed{(4)}$ となる。したがって、観測者が観測する振動数 f' は、$f' = \boxed{(5)}$ となる。

次に、図 2 のように、観測者も一直線上を音源に向かって速さ V ($V \ll c$) で近づく場合を考える。このとき、観測者にとって音波は相対速度 $\boxed{(6)}$ で進む。したがって、観測者が単位時間当たりに受ける振動は、距離 $\boxed{(7)}$ の間にある音の振動であることに注意すると、その振動数 f'' は、$f'' = \boxed{(8)}$ となる。

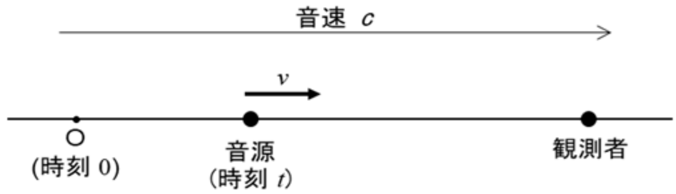

図 1:

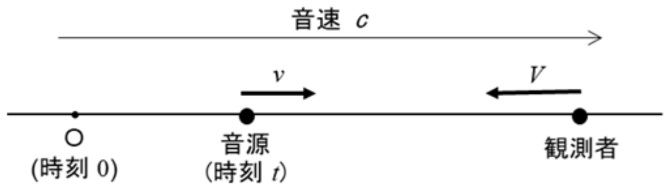

図 2:

問 2 振幅が等しく、振動数がわずかに異なる 2 つの波を重ね合わせるとうなりが生じる。ある点で観測した 2 つの波の変位 y_1、y_2 を、

$$y_1 = a\sin(2\pi ft)$$
$$y_2 = a\sin\{2\pi(f+\Delta f)t\}$$

とし、$f \gg \Delta f > 0$ とする。この 2 つの波を重ね合わせたときに生じるうなりの振動数 F は、$F = \Delta f$ となることを示せ。必要なら、

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\,\sin\frac{\alpha+\beta}{2}$$

を用いてよい。

問 3 超音波のドップラーシフトとうなりを利用して、超音波を反射する物体の速度を測ることを考える。図 3 のように、振動数 f の超音波を発する音源に向かって、物体が速さ v で動いているものとする。なお、超音波は、速度 c で伝播し、$v \ll c$ とする。

(a) 物体が受ける超音波の振動数を求めよ。

(b) 物体で反射された超音波を音源の位置で受信した。受信した超音波の振動数を求めよ。

(c) 音源から発する超音波と物体で反射されて返ってきた超音波を重ね合わせると、振動数 F のうなりが観測された。このうなりの振動数 F から、物体の速度 v を求める式を導け。

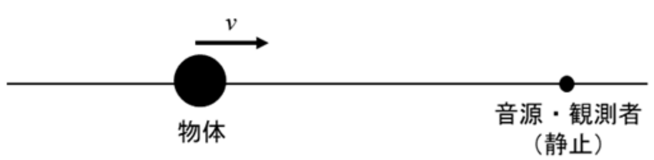

図 3: