

北海道大学大学院環境科学院  
地球圏科学専攻  
大気海洋物理学・気候力学コース

令和6年度大学院修士課程入学試験問題  
専門科目

問題1と2は必答問題、問題3~6は選択問題である。必答問題2問は必ず解答すること。選択問題は、数学1問・物理学1問・地球物理学2問、計4問出題されている。その中から1問を選択し、解答すること。1問につき1枚の解答用紙を使用し、解答用紙には問題番号を記入すること。

令和5年8月

## 問題 1 : 必答問題

問 1 3次元直交直線座標  $(x, y, z)$  における、 $x, y, z$  方向の単位ベクトル  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ 、スカラー関数  $f = cze^{ax} \sin by$ 、ベクトル関数  $\mathbf{g} = (e^{ax} \sin by, cz \sin by, cze^{ax})$  について、以下の (a)~(e) を求めよ。ただし、 $a, b, c$  は定数とする。

- (a)  $\mathbf{i} \cdot \mathbf{j}$
- (b)  $\mathbf{j} \times \mathbf{k}$
- (c)  $\nabla f$
- (d)  $\nabla \cdot \mathbf{g}$
- (e)  $\nabla \times \mathbf{g}$

問 2 行列  $A = \begin{pmatrix} ax & b \\ 1 & 2x \end{pmatrix}$  と  $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$  について、以下の (a), (b) を求めよ。ただし、 $a, b$  は正の定数とする。

- (a) 行列  $A$  が逆行列を持たないという条件を満たすときの  $x$
- (b) 行列  $B$  の固有値と固有ベクトル

問 3 次の微分方程式を解き、解のグラフを描け。

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 3y = 0, \quad y(0) = 3, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} y = 0$$

問 4 複素関数  $z = e^{i\frac{\pi}{2}} e^{ix}$  の実部と虚部それぞれについてグラフを描け。ただし、 $i$  は虚数単位とする。

## 問題2：必答問題

問1 図1のように質量が無視できる長さ  $L$  の2本のひもに、十分な大きさを持つ質量  $M$  の木片がつるさされて静止している。質量  $m$  の矢が放たれて木片に刺さると、矢と木片は振動をはじめた。ひもが鉛直方向となす最大角は  $\theta$  であった。矢が木片に刺さる前の速さを  $V_1$ 、矢が木片に刺さった直後の速さを  $V_2$ 、重力加速度の大きさを  $g$  とし、以下の問に答えよ。なお、空気抵抗、熱、摩擦は無視し、ひもはたるまず、運動は同一鉛直面内で起こるとする。

- 矢が木片に刺さる前後の運動量保存則を式で示せ。
- 矢が木片に刺さった直後と、矢と木片の位置が最大角  $\theta$  まで移動したときを考える。この場合の力学的エネルギー保存則を式で示せ。
- 矢が木片に刺さる前の速さ  $V_1$  を、 $m, M, g, L, \theta$  を用いて示せ。

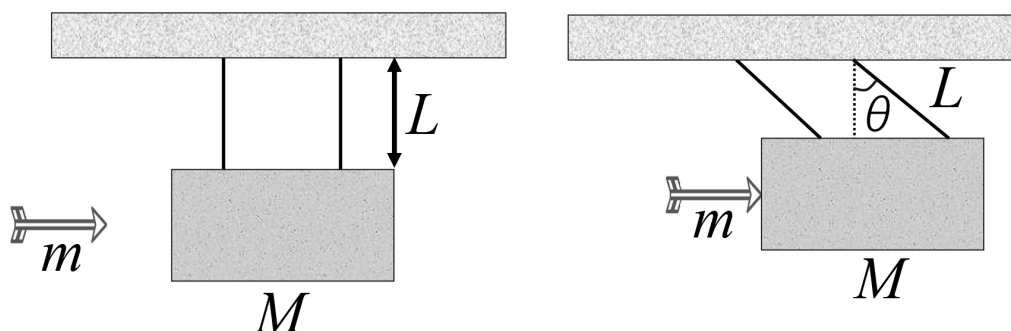


図1: (左) 矢が木片に刺さる前。(右) 矢と木片の位置が最大角  $\theta$  まで移動したとき。

問 2 図 2 のように、半径  $R$ 、質量  $M$  で厚みが半径に比べて無視できるほど薄い剛体の円筒が、斜面の高さ  $h$  で静止した状態から滑らずに転がり落ちる場合を考える。

- (a) 円筒の速さが  $V_1$  のときの、質量中心の運動エネルギーと回転エネルギーの和を  $M, V_1$  を用いて示せ。
- (b) 円筒と同じ半径  $R$ 、質量  $M$  を持つ剛体の円柱がある。同様に斜面の高さ  $h$  で静止した状態から滑らずに坂を転がり落ちるとする。高さ  $h$  を転がり下りたときの速さは、円筒と円柱のどちらが速いか。エネルギー保存を用いて説明せよ。

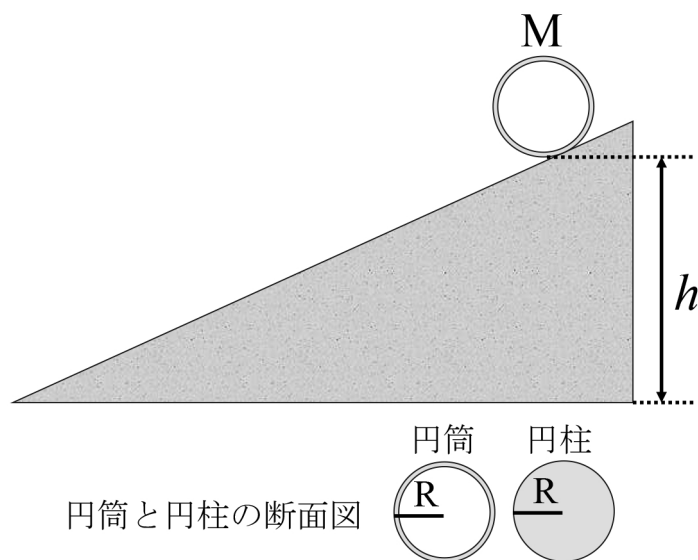


図 2: 円筒が斜面の高さ  $h$  で静止している状態。円筒と円柱の断面図を下に示す。

問 3 1 mol の理想気体を温度  $T_1$  に保ったまま、その体積を  $V_1$  から  $V_2$  になるまで準静的に膨張させる。この気体がした仕事を求めよ。ただし気体定数を  $R$  とする。

### 問題3：選択問題・数学

関数  $f(t)$  に対して  $F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$  が存在するとき、 $F(s)$  を  $f(t)$  のラプラス変換と呼び、 $L\{f\}$  で表す。ここで  $s > 0$  である。以下の問に答えよ。

問1  $L\{1\}$ ,  $L\{e^{at}\}$  を求めよ。ただし、 $a$  は定数で、 $s > a$  とする。

問2  $L\{\sin bt\}$ ,  $L\{\cos bt\}$  を求めよ。ただし、 $b$  は定数とする。

問3 関数  $f$  の1階微分を  $f'$  とする。 $f$  が  $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-st} f = 0$  を満たすとき、

$$L\{f'\} = sL\{f\} - f(0)$$

が成り立つことを示せ。

問4 微分方程式

$$\frac{dx}{dt} + 2x = \sin t, \quad x(0) = 0$$

の両辺をラプラス変換し、問1～問3の結果を用いることによって解け。

## 問題 4 : 選択問題・物理学

振動、波動に関する以下の問に答えよ。重力の効果は無視できるとする。

- 問 1 質量を無視できる糸の中央に質量  $m$  のおもりをつけ、間隔  $2L$  の平行な壁の間に、張力  $T_a$  で壁に直角に張る。図 1 のように、おもりを壁に平行にずらして離すと振動する。おもりの変位  $y$  が微小で、両端を結ぶ直線と糸がなす角度  $\theta$  が微小な場合を考え、 $T_a$  は変化せず定数であると仮定して、おもりの変位に関する運動方程式を書き、この振動の角振動数を求めよ。

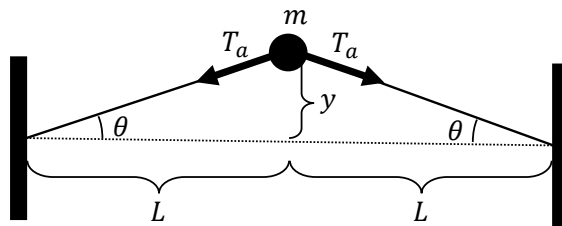


図 1

- 問 2 張力  $T_b$  で張られた、単位長さあたりの質量が  $\rho$  である弦を伝わる波を考える。図 2 のように、弦に沿って  $x$  軸、それと直角に  $y$  軸をとると、 $y$  方向の変位は  $x$  ならびに時刻  $t$  の関数として  $y = f(x, t)$  と書き表せる。以後、変位は微小と仮定し、 $T_b$  は変化せず定数であるとする。 $x = x_1$  と  $x = x_1 + \Delta x$  の間にある質量  $\rho\Delta x$  の微小部分の運動を考える。 $x_1$  において弦が  $x$  軸となす角を  $\theta_1$  とすると、この微小部分を  $x = x_1$  において引く力の  $y$  成分は、 $\theta_1$  を用いて (A) と表せる。 $\theta_1$  は微小で弦の  $x$ - $y$  平面内での傾きに近いことから、(A) は  $f(x, t)$  の偏微分を用いて (B) と近似できる。同様にして、この微小部分を  $x = x_1 + \Delta x$  で引く力の  $y$  成分は (C) と近似できるため、この微小部分の運動方程式は

$$\rho\Delta x a = \text{(B)} + \text{(C)} \quad (1)$$

と表せる。ここで  $a$  は、微小部分の重心の  $y$  方向の加速度である。式 (1) の両辺を  $\Delta x$  で除し、 $x_1$  を  $x$  に書き換えて  $\Delta x \rightarrow 0$  の極限をとると、その左辺と右辺は  $f(x, t)$  を用いてそれぞれ (D)、(E) と表せる。このようにして、弦を伝わる波を記述する偏微分方程式

$$\text{(D)} = \text{(E)} \quad (2)$$

が得られる。

- (a) 文章中の空欄 (A) ~ (E) にあてはまる数式を答えよ。

- (b) 式(2)より、弦を伝わる波の速さ  $c$  を求め、弦の長さが十分に長いとして  $x$  が増加する方向に伝わる解の一例を示せ。
- (c) 弦の長さが  $l$  で両端が固定されているときにできる最も低い音の周期を求めよ。

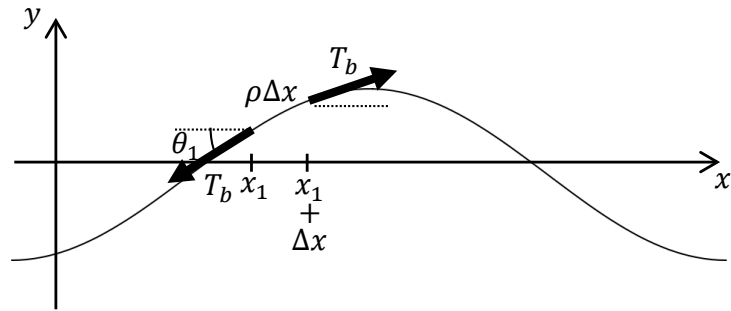


図2

## 問題5：選択問題・地球物理学

図は人工衛星観測に基づく放射の大きさの緯度分布を表す。以下の問に答えよ。

問1 次の3つの問に答えよ。

- (a) 地球に到達する太陽放射の主要な3つの電磁波の波長帯の名称を答えよ。また、そのうち最もエネルギー総量の大きい波長帯を答えよ。
- (b) 図中の1の細線は、大気上端に到達する太陽放射の緯度分布を表し、その平均値は  $341 \text{ W m}^{-2}$  である。この値は地球に到達する太陽放射（太陽定数、 $1366 \text{ W m}^{-2}$ ）の約  $1/4$  の大きさである。その理由を示せ。
- (c) 図中の1の細線で示される大気上端に到達する太陽放射と、2の太線で示される大気と地表面に吸収される正味の太陽放射には差がある。その理由を簡潔に説明せよ。（30~50字程度）

問2 次の2つの問に答えよ。

- (a) 図中の2の太線で示される大気と地表面に吸収される正味の太陽放射の緯度分布には北緯10度付近に極小域があることが分かる。また、3の点線で示される地球放射の緯度分布にも同様の極小域が見られる。これらの理由をそれぞれ説明せよ。（あわせて100字程度）
- (b) 図に示される様に、3の点線で示される地球放射の極域と赤道域の差は、2の太線で示される大気と地表面に吸収される正味の太陽放射の極域と赤道域の差と比べて小さい。このことから予想される南北の熱輸送の分布を、北向きの熱輸送量を正とし、緯度の関数として図示せよ。ただし具体的な熱輸送量の値を求める必要はない。また、その南北の熱輸送と関わりのある大気現象を低緯度域と中緯度域それぞれについて述べよ。（あわせて70字程度）

問3 10年以上の衛星観測において、大気と地表面に吸収される正味の太陽放射の総量と地球放射の総量を比較すると、地球放射の方がわずかに小さいという不均衡が観測されている。観測の精度は十分であるとし、この不均衡が生じる原因としてどのようなことが考えられるか説明せよ。（100字程度）



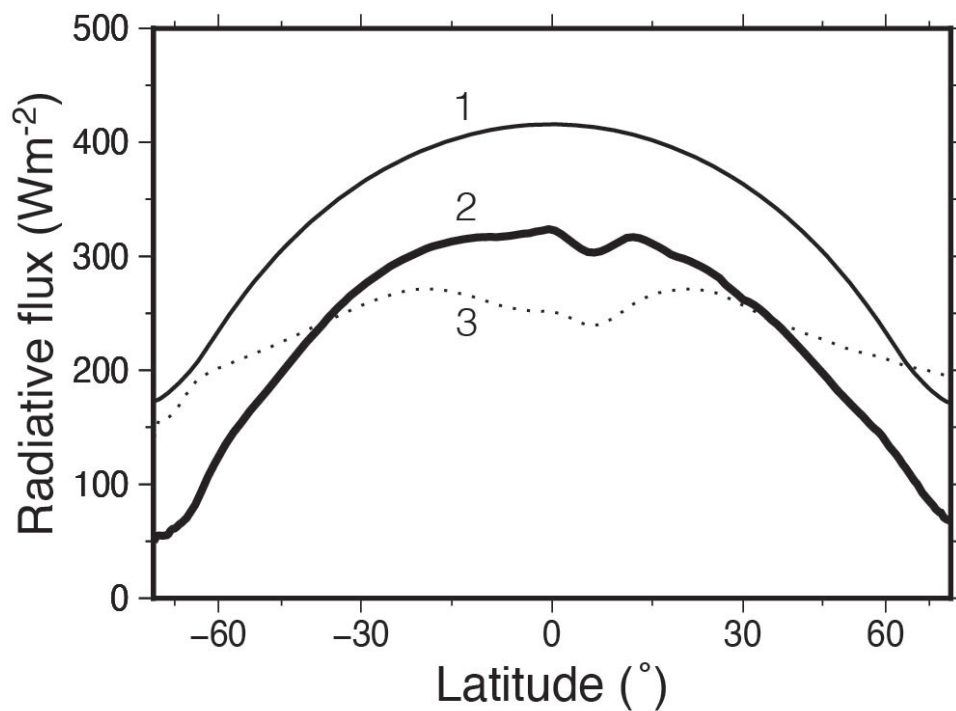


図: 放射の大きさの緯度分布。CERES 衛星観測に基づく東西および10年間の平均値。1の細線は大気上端に到達する太陽放射。2の太線は大気と地表面に吸収された正味の太陽放射。3の点線は宇宙への地球放射。単位は  $W m^{-2}$ 。

## 問題6：選択問題・地球物理学

ある緯度帯の海面を経度方向に流れる地衡流について考える。 $x$ 方向を流れに沿う向き、 $y$ 方向を流れに直交する向きにとるとき、海面での流れの速さ  $u$  は、図1のように、 $-L < y < L$  の範囲で

$$u = U_0 \cos\left(\frac{\pi y}{2L}\right)$$

と書け、それ以外の領域では0となっている。なお、各小問で考える緯度の対象領域内ではコリオリパラメーターは一定と考えてよいものとする。以下の問に答えよ。

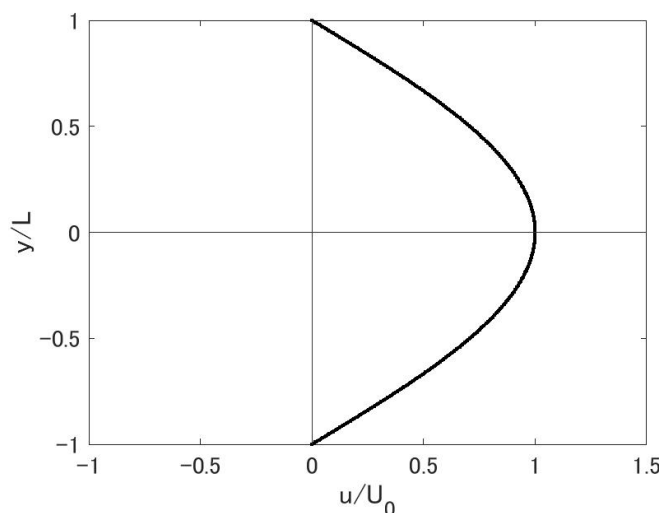


図1

- 問1 地衡流の関係では2つの力がつりあっている。それらの力を述べよ。
- 問2 この流れにともなう力学的海面高度  $\eta$  の形の概略を、適切な座標軸とともに図示せよ。また、 $y = -L$  における  $\eta$  は  $y = L$  における  $\eta$  に比べてどれほど高いか低いかを導出過程を示した上で求めよ。ここでコリオリパラメーターを  $f$ 、重力加速度の大きさを  $g$  とする。
- 問3 北緯45度で、 $U_0$  が  $0.5 \text{ m s}^{-1}$ 、 $L$  が  $100 \text{ km}$  のとき、 $y = -L$  と  $y = L$  における力学的海面高度の差を求めよ。ここでコリオリパラメーター  $f$  を  $10^{-4} \text{ s}^{-1}$ 、重力加速度の大きさ  $g$  を  $10 \text{ m s}^{-2}$  として計算してよいものとする。
- 問4 問3で求めた南北方向の力学的海面高度の差が、同じ南北方向の高低の位置関係を保ったまま南緯60度にあるとする。このとき、流れの向きはどちらに向き、速さは何倍になるかを答えよ。
- 問5 現在の海洋学では人工衛星を利用して海面での流れに関する力学的高度を計測している。この力学的海面高度の測定原理を100~150字程度で説明せよ。