北海道大学大学院地球環境科学研究科大気海洋圏環境科学専攻
大循環力学講座、気候モデリング講座、極域大気海洋学講座

平成７年度 入学試験問題（専門科目）

地球物理学、物理学、数学から各３問、計９問出題されている。その中から４問選択し、解答すること。

地球物理学第一問

次の語句について内容を簡潔に説明せよ.

1. 混合層
2. エクマン輸送
3. ロスビー数
4. ロスビー変形半径
5. 熱塩循環
6. リチャードソン数
7. エルニーニョ
8. 放射平衡

地球物理学第二問

地球大気の現象に関する次の記述について，それぞれの正誤を記し，誤っているものはそれを訂正せよ．

「A であるから B である」が誤りのとき，「A' であるから B である」と「A であるから B' である」という 2 通りの訂正が可能であるように，訂正の仕方は一通りではない．必要な場合，追加もして，それぞれのテーマに沿った正しい記述になるようにすること．

1. 空気塊が上昇するとき，水蒸気に関して未飽和ならば，空気塊は断熱膨張のため，1 km につき約 1 °C の割合で温度が下降するが，飽和して凝結が生じると凝結の潜熱を奪われて温度降下は著しくなる．
2. 水蒸気 (H_2O) や二酸化炭素 (CO_2) は地表面から放出される赤外放射を強く吸収し，自らは熱放射しないので地表面からの熱の流出を妨げる温室効果をもっている．
3. 雨粒の代表的直径が 1000 μm であるのに対して雲粒は 10 μm 程度であり，雲粒に水蒸気が連続的に凝結し成長することによって雨粒が生じる．
4. 中緯度帯では南北の温度差が強く，それに応じて温度風関係で示されるように北半球では上層ほど西風が強く，南半球では上層ほど東風が強くなっている．
5. 中緯度帯で温帯低気圧が発生するのは、東西風の鉛直シアーにより渦が生じ，平均流の運動エネルギーが低気圧の運動エネルギーに転化するためである．これを傾圧不安定と言う．
6. 熱帯低気圧は、温帯低気圧のように大気中に既存の温度差が原因ではなく，水蒸気の凝結によって常に温度差が生み出されていることによって維持されている．
7. 大気の大循環は基本的には南北の温度差による対流現象とみなされるが，北半球の中緯度域では上空で極向きの流れを生じ，それが地球自転のためコリオリ力の作用を受けて上空の偏西風が生じる．

地球物理学第三問

海洋の風成循環を考える．東西風が吹き，その方向にのみ海面に応力が与えられているとする．簡単のため，定常，線形，密度一定を仮定する．その時の方程式は

$$-fv = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z}\nu\frac{\partial u}{\partial z} \quad (1)$$

$$fu = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}\nu\frac{\partial v}{\partial z} \quad (2)$$

$$0 = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial z} - g \quad (3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (4)$$

となる．νは渦粘性係数（定数と仮定），ρ_0は密度（定数），pは圧力，(u, v, w)は(x, y, z)方向の流速で，(x, y, z)は東，北，上を正に取ってある．境界条件は

$$\left.\begin{array}{ll} w = 0, \quad \nu\dfrac{\partial u}{\partial z} = \dfrac{1}{\rho_0}\tau, \quad \nu\dfrac{\partial v}{\partial z} = 0 & \text{at} \quad z = 0 \\ w = 0, \quad \nu\dfrac{\partial u}{\partial z} = 0, \quad \nu\dfrac{\partial v}{\partial z} = 0 & \text{at} \quad z = -H \end{array}\right\} \quad (5)$$

である．ここで，Hは水深で，$z = 0$が海面，τは海面での風の応力，また，深いところでの流速は小さいとして底での摩擦応力はゼロとした．以下の問に答えよ．

(a) コリオリパラメーター，f，海面での応力，τ，が定数であるとする．この場合の鉛直積分流速ベクトル，(M_x, M_y)，ここで，

$$M_x = \int_{-H}^{0} u dz, \qquad M_y = \int_{-H}^{0} v dz,$$

を求めよ．ただし，場は水平方向に一様である$(\partial/\partial x = \partial/\partial y = 0)$と仮定する．

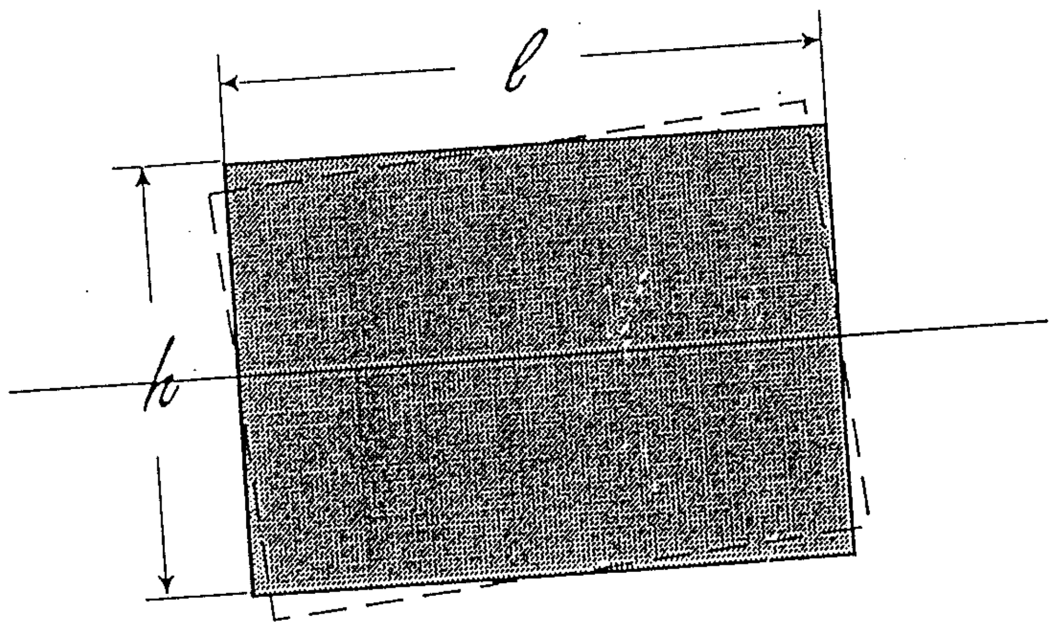
(b) (a) で求めた流れの場は，全水深Hよりも十分に薄い境界層（エクマン層）内のみに存在すると考えられる．その境界層のおおよその厚さ，δ_E，を，fとνを用いて表せ．

(c) ここまでは水平方向に一様な状況を考えてきたが，地球上ではコリオリパラメーターはyの関数（通常df/dyはβと書かれる）であり，また，τも南北に変化する．したがって，水平方向に一様と仮定することはできない。fとτがyの関数である場合のM_yを求めよ．

(d) (c) で求めた流れは (a) で求めた粘性項が重要となる境界層内の流れと圧力傾度に比例する地衡流の和として表すことが出来る．後者の流れは境界層よりもずっと深い領域にまで及ぶ．この流れが如何にして駆動されるか説明せよ．

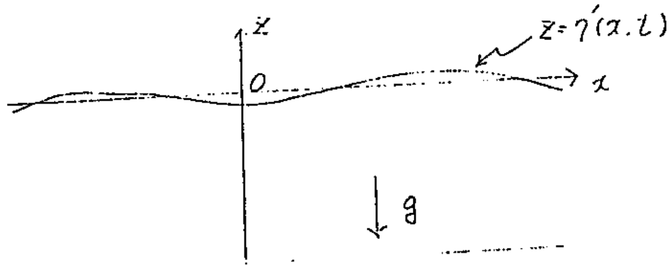
物理学第一問

図のように水の上に断面が長方形の長い柱が一つの面が水平になる状態で浮いている。柱の材質は均一で比重は水の半分である。今、この柱をほんのわずか傾けたとき、元に戻ろうとする力が働くための条件を示せ。



物理学第二問

重力場中の密度一定 ($\rho = \rho_0$) の非粘性流体における, 2 次元 (x, z) 面内での微小擾乱を考える. 静止状態での流体表面の高さを $z = 0$ とし, 流体は無限に深いと仮定する (下図参照).



この時の流体の運動は, 次の方程式系で記述される.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + w\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial x}, \tag{1}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + w\frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial z} - g, \tag{2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \tag{3}$$

ここで, u, w は各々, 水平, 鉛直方向の流速であり, p は圧力, g は重力加速度を表す. また以下では, 基本場として静止状態を考える.

(a) 基本場での流体中の圧力の鉛直分布 $p_0(z)$ が

$$p_0(z) = p_{air} - \rho_0 g z, \tag{4}$$

で与えられることを示せ. ここで, p_{air} (=一定) は流体表面での大気圧である.

(b) 式 (1) ~ (3) を微小擾乱の仮定を用いて線形化することにより, 擾乱に伴う鉛直流 w' (以下, 擾乱場にはダッシュを付ける) に対する次の方程式を導け.

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) w' = 0. \tag{5}$$

(c) 擾乱に伴う w', p' に対する流体表面での境界条件が,

$$w' = \frac{\partial \eta'}{\partial t} \qquad \text{at } z = 0, \tag{6}$$

$$p' = \rho_0 g \eta' \qquad \text{at } z = 0, \tag{7}$$

で与えられることを示せ. 但し, η' は流体表面の高さを示す (図参照).

(d) 式 (5), (6) で擾乱として, 東西波数 k (> 0), 振動数 ω を持つ次の波動解:

$$w' = w_0(z) \exp i(kx - \omega t), \tag{8}$$

$$\eta' = \eta_0 \exp i(kx - \omega t), \tag{9}$$

を仮定し, $z \to -\infty$ での境界条件を考慮すると, w' は次式で与えられることを示せ.

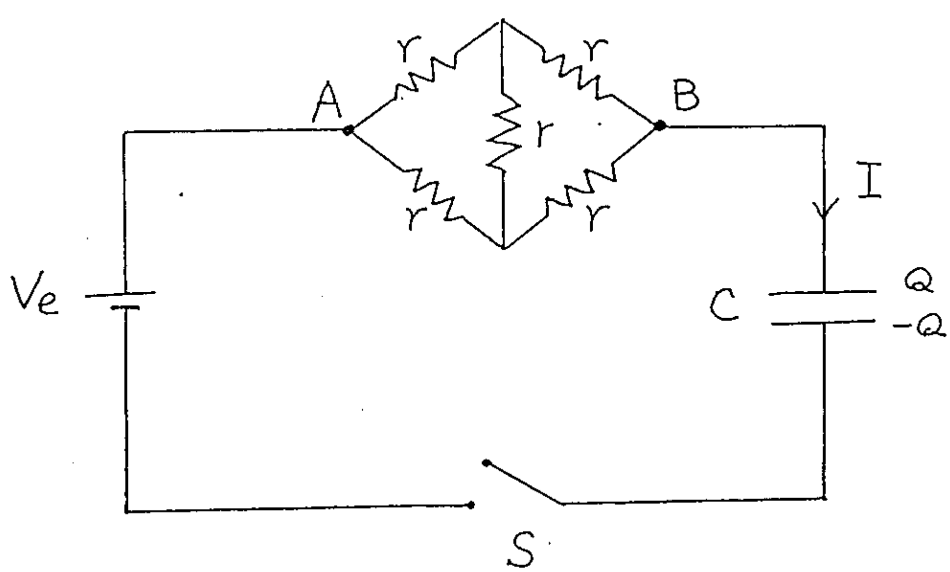
$$w' = -i\omega\eta_0 \exp(kz) \exp i(kx - \omega t). \tag{10}$$

(e) 式 (7) の境界条件より, 擾乱の分散関係式を導き, 擾乱の位相速度及び群速度を求めよ.

物理学第三問

下の図のように, 5 つの抵抗 r の電気抵抗, 静電容量 C のコンデンサ, 起電力 V_e の電源をつないだ回路をつくる.

1. A − B 間の合成抵抗 R を求めよ.
2. 時刻 $t=0$ にスイッチ S を入れた. コンデンサの極板に蓄えられる電荷 Q の時間変化を求めよ. ただし, $t=0$ で $Q=0$ である.
3. $t=\infty$ での Q を求めよ.
4. B 点での電流 I の時間変化を求めよ.
5. 電流が流れなくなるまでに電源のした仕事 W を求めよ.
6. 電源のした仕事とジュール熱の差は何になったか.



数学第一問

(x, y) の t に関する微分方程式

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= x - y - ax(x^2 + y^2) \\ \frac{dy}{dt} &= x + y - ay(x^2 + y^2)\end{aligned}$$

の解の振舞いを調べる. ただし a は実数パラメタである.

1. 変数変換

$$\begin{aligned}r &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta &= \tan^{-1}\frac{y}{x}\end{aligned}$$

を施し, r と θ が満たす方程式系を導け.

2. 解軌道の概略を $x - y$ 平面上に図示せよ. 定常点, 周期軌道などの特徴的な構造の存在を, パラメタ a に関して分類せよ.

数学第二問

n 行 n 列の行列 A が与えられたときに

$$Ax = \lambda x, \ x \neq o \tag{1}$$

を満足する定数λとベクトルxが存在するとき、λを A の固有値、xを固有値λに属する固有ベクトルと言う。一般に n 個の固有値が存在するが、ここでは全ての固有値が異なる場合を考える。

(a) 2 行 2 列の行列 A があるとき、(1) 式は

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

のように書ける。この場合に 2 つの固有値λ_1, λ_2と 2 つの固有ベクトルψ_1, ψ_2を求めよ。

(b) 行列$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$の固有値と固有ベクトルを求めよ。

(c) A が対称行列 (即ち、$a_{12} = a_{21}$) であれば、(a) で求めた 2 つの固有ベクトルψ_1, ψ_2は直交することを示せ。

(d) A の転置行列 $A^t = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$は A と同じ固有値λ_1, λ_2を持つことを示せ。また、A^t の固有ベクトルϕ_1, ϕ_2を求め、(a) の結果と合わせてψ_1とϕ_2、ψ_2とϕ_1は $a_{12} \neq a_{21}$の場合でも、それぞれ直交することを示せ。

数学第三問

微分方程式と差分方程式の関係について次の設問に答えよ。ただし数値を求める場合は、小数点以下第２位まで求めること。

（１）微分方程式

$$dx/dt=x \tag{I}$$

の初期値（ｔ＝０における値）が１である時、ｘの解を求めよ。

（２）（Ｉ）の微分方程式を数値的に解くために、これを以下の差分方程式になおす。

$$(x_{i+1}-x_i)/\Delta t=x_i \tag{II}$$

ただしΔtは時間ステップ、x_iは$t=i\Delta t$における値とする。x_0を１とする時、x_iをΔtとｉで表わせ。

（３）$\Delta t=1$、1/2, 1/4　とした時の、ｔ＝１における（ＩＩ）の差分方程式の数値解を求め、（Ｉ）の厳密解と較べよ。どのΔtの値の時厳密解に最も近いか。ただし$\log_e 2=0.69$, $e=2.72$, $e^2=7.34$を用いてもよい。

（４）（Ｉ）式の時間微分の項である左辺は、（ＩＩ）に用いられた差分のままにし、右辺をx_i及びx_{i+1}を用いて置き換えると、より高近似の差分方程式ができる。これを示せ。

（５）$\Delta t=1$、1/2, とした時の、ｔ＝１における（４）の差分方程式の数値解を求めよ。（２）よりも（４）の方が厳密解に近いことを示せ。