

北海道大学大学院地球環境科学研究科
大気海洋圏環境科学専攻
大循環力学講座 気候 デリング講座 極域大気海洋学講座

平成8年度大学院修士課程入学試験問題
(飛級)

専門科目

数学・物理学・地球物理学から各3問, 計9問出題されている。その中から4問選択し, 解答すること。解答用紙には科目名と問題番号を記入すること。

平成8年3月

数学・問題 I

次の式 (1) のような ルコフ過程で記述される、ランダムノイズの自己相関係数について考える。

$$r(t + \Delta t) = \rho r(t) + n(t). \quad (1)$$

ここで、 ρ ($|\rho| < 1$) は定数、 Δt は微小時間であり、 $n(t)$ は白色ノイズを表す。

問 1 $r(t + m\Delta t)$ が、次の式 (2) で表されることを示せ。

$$r(t + m\Delta t) = \rho^m r(t) + \sum_{i=1}^m \rho^{m-i} n(t + (i-1)\Delta t). \quad (2)$$

問 2 $r(t)$ は定常確率過程であると仮定し、 $r(t)$ のラグ τ での自己相関係数 $C(\tau)$ を

$$C(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} r(t)r(t+\tau)dt \quad (3)$$

で定義する時、 $C(\tau + \Delta t)$ と $C(m\Delta t)$ がそれぞれ、

$$C(\tau + \Delta t) = \rho C(\tau), \quad (4)$$

$$C(m\Delta t) = \frac{\rho^m}{1 - \rho^2} \overline{n^2} \quad (5)$$

となることを示せ。ここで、 $\overline{n^2} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} n^2(t)dt$ である。また、白色ノイズ $n(t)$ の性質として、他の時系列との相関は 0 であり、ラグ τ が 0 の場合以外は自己相関係数は 0 となることを利用せよ。

問 3 式 (4) を Δt でテイラー展開し、 Δt の 1 次の項までとることにより、 $C(\tau)$ に関する次の微分方程式を導出し、その解を求めよ。

$$\frac{dC}{d\tau} = -\alpha C. \quad (6)$$

ここで、 α は $\alpha = (1 - \rho)/\Delta t$ で定義される相関の逓減率である。

数学・問題 II

次の方程式を解き、 $x = 0$ の線上における解を図示せよ。

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} u(x, y) = f(x, y).$$

ここで、関数 $f(x, y)$ は、

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{for } x < 0 \\ \cos(kx) & \text{for } x \geq 0 \end{cases}$$

とおく。但し、

$$u(x, y) = 0 \text{ for } y = -\infty$$

$$u(x, y) \text{ は } y = \infty \text{ で有界}$$

$$u(x, y) \text{ は } y = 0 \text{ で連続}$$

という境界条件を満たすものとする。

数学・問題 III

問 1 線形常微分方程式、

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + f(x) \frac{dy}{dx} + [\lambda g(x) - h(x)] y = 0 \quad (1)$$

を

$$\frac{d}{dx} p(x) \frac{dy}{dx} + [\lambda q(x) - r(x)] y = 0 \quad (2)$$

という形に書き直した。 $f(x)$ 、 $g(x)$ 、 $h(x)$ を用いて、 $p(x)$ 、 $q(x)$ 、 $r(x)$ を表せ。

問 2 x の変域を $(0, 1)$ とし、 $p(x)$ 、 $q(x)$ は $0 \leq x \leq 1$ でゼロでない有限の値をとるとする。 $x = 0, 1$ での境界条件が、 α 、 β を定数として、

$$\alpha \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0} + y(0) = 0, \quad \beta \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=1} + y(1) = 0 \quad (3)$$

の形に与えられた時、この境界条件を満足する y は特定の λ に対してのみ存在する。このような λ を固有値といい、その時の y を固有関数と呼ぶ。固有値は一般に無限個あり、 n 番目の固有値を λ_n 、それに対応する固有関数を y_n と書くことにする (ここで、 $n = 1, 2, 3, \dots, \infty$)。 $\lambda_n \neq \lambda_m$ の時、

$$\int_0^1 q(x) y_n(x) y_m(x) dx = 0 \quad (4)$$

が成り立つことを示せ。

問 3 境界条件 (3) を満足する関数、 $F(x)$ 、を y_n で

$$F(x) = \sum_{n=1}^{n=\infty} a_n y_n(x) \quad (5)$$

と展開した。この時の a_n を記せ。

物理学・問題 I

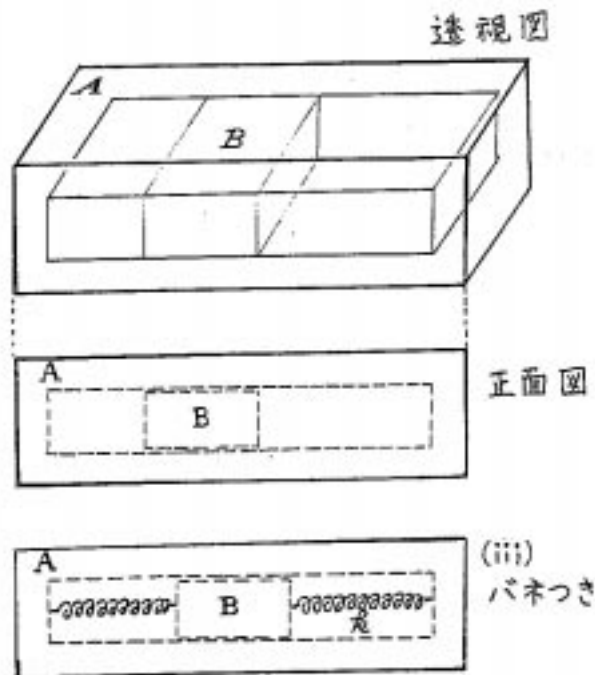
図に示すように内部に直方体形の空洞を作った直方体の物体 A の中に空洞にぴったりはまる小形の直方体の物体 B が入ったものがある。これを壊さずに運動させることなどにより A、B それぞれの質量を知りたい。どのような実験をし、どのような結果が予想され、それからどのように答を求めればよいか。以下の問にある各場合について筋道を述べよ。ただし、問 1 から問 3 では空気の影響を無視する。

問 1 A、B 間をはじめ、一般に物体間の摩擦が無い場合について答えよ。

問 2 接触面にかかる力(重力による)に比例し、相対速度によらない摩擦が働く場合について答えよ。

問 3 問 1 と同様の物体で、A、B が等長のバネで結ばれている場合(下図)、A、B の質量とバネ定数 k を求めるにはどうすれば良いか。

問 4 問 1 で中空部の空気の効果が無視できない場合、実験結果はどのように変わるか。



物理学・問題 II

真空中の Maxwell 方程式は

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (1)$$

$$\nabla \times \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} = \mathbf{i} + \frac{\partial(\varepsilon_0 \mathbf{E})}{\partial t}, \quad (2)$$

$$\nabla \cdot (\varepsilon_0 \mathbf{E}) = \rho, \quad (3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (4)$$

である。ここで、 \mathbf{E} は電場、 \mathbf{B} は磁束密度、 μ_0 は真空の透磁率、 ε_0 は真空の誘電率、 ρ は電荷密度、 \mathbf{i} は電流密度である。以下の問いに答えよ。

問 1 Maxwell 方程式の物理的意味を説明せよ。あわせてそれぞれの式に深く関係する物理現象・物理法則があればそれについても説明せよ。

問 2 $\rho = 0, \mathbf{i} = 0$ の場合、

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0} \nabla^2 \mathbf{E}, \quad (5)$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0} \nabla^2 \mathbf{B} \quad (6)$$

が成り立つことを示せ。この式の解は何を表現しているか説明せよ。 $\frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}$ という量は何であるかも答えよ。

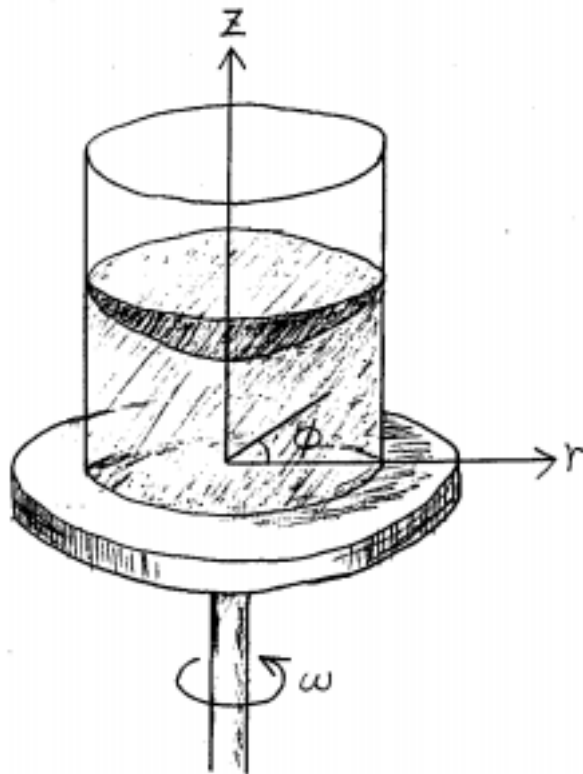
物理学・問題 III

図に示すように、円筒状の容器に水を入れて回転台の上に載せ、一定の角速度 ω で回転させる。しばらくすると、水は回転になじみ、容器と同じ剛体回転(角速度が場所によらず一定の回転のこと)を行うようになる。今、この状態について考えるとする。図に示すような円筒座標を用い、大気圧を P_a 、水の密度を ρ 、重力加速度を g とする。また、回転の軸が容器の中心($r=0$)と一致しているとし、中心での水面の高さを h_0 とする。以下の問に答えよ。

問1 水中の任意の場所での圧力 $P(r, z, \phi)$ を求めよ。

問2 水面は外側ほど盛り上がるが、この水面の形 $h(r)$ を求めよ。

問3 容器内の水面に木片を静かに浮かべた場合の木片の挙動を、木片と水との間に摩擦がある場合とない場合について論ぜよ。



地球物理学・問題 I

密度一様の海洋において、以下のような方程式系を考える。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - fv = -g \frac{\partial \eta}{\partial x}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + fu = -g \frac{\partial \eta}{\partial y}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(uh) + \frac{\partial}{\partial y}(vh) = 0. \quad (3)$$

ここで、 u, v はそれぞれ x, y 方向の流速、 f はコリオリパラメーター、 η は水面の変位、 h は水面から海底までの深さ、 g は重力加速度とする。ベータ平面近似により、 $f = f_0 + \beta y$ で、 f_0 は定数とする。

問 1 (1) 式を y について、(2) 式を x について微分し、 η を消去せよ。ここで、 f はその y 微分を考える場合以外は定数 f_0 とみなして計算せよ。

問 2 相対渦度 $\zeta \equiv \partial v / \partial x - \partial u / \partial y$ および全微分 $D/Dt \equiv \partial / \partial t + u(\partial / \partial x) + v(\partial / \partial y)$ の定義を用いて、次の式を導出せよ。

$$\frac{D\zeta}{Dt} + (\zeta + f_0) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \beta v = 0. \quad (4)$$

問 3 (4) 式中の $(\partial u / \partial x + \partial v / \partial y)$ を (3) 式を用いて消去し、 $Df/Dt = \partial f / \partial t + u(\partial f / \partial x) + v(\partial f / \partial y) = v\beta$ の関係を用いて、次のポテンシャル渦度の保存式を導出せよ。ただし、 $f_0 \gg \beta y$ とする。

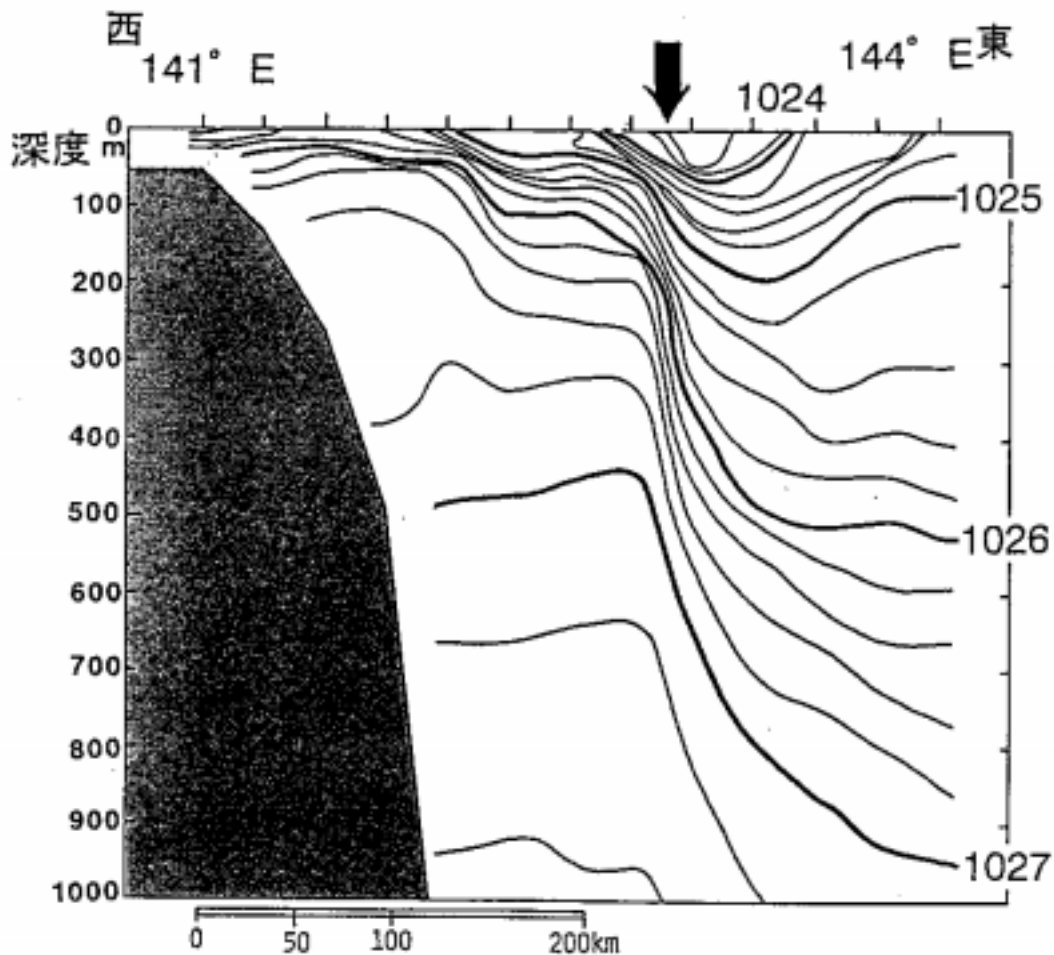
$$\frac{D}{Dt} \left(\frac{\zeta + f}{h} \right) = 0. \quad (5)$$

問 4 (5) 式を用いて、東向きの一様な流れが深さ h_0 の海域から h_1 の海域に流入した際の振る舞いについて述べよ。ただし、 $h_0 < h_1$ とする。

地球物理学・問題 II

下の図は、房総半島沖を流れる黒潮を $35^{\circ}30'N$ で、 $141^{\circ}E$ から $144^{\circ}E$ まで東西に横断する観測によって得られた密度 (kg/m^3) の断面図である (1995 年 5 月)。

地衡流平衡、静水圧平衡、及び 1000m 深において流れが存在しないと仮定した場合、図の矢印の直下における 0-1000m 深の流れはどのようなになると推測されるか。流向及び流速の深さに対する変化について論じ、その理由について述べよ。また、このとき海面の形状はどのようなになっているか、理由も含めて論述せよ。



地球物理・問題 III

下の図は、地球が吸収する放射量と地球から出ていく放射量の緯度分布を示したものである。

- 問 1 地球が吸収する放射量を決めているのは何であるか、そしてなぜ図に示すような緯度分布となるのか論じなさい。
- 問 2 出ていく放射量を決めているのは何であるか、そしてなぜ図に示すような緯度分布となるのか論じなさい。
- 問 3 2つの差はどのようなメカニズムを通して解消されるか、具体例を上げながら考えられるメカニズムについて論じなさい。

