

地球流体中の孤立擾乱と渦の力学

by 久保川 厚

北海道大学大学院地球環境科学研究院

(kubok@ees.hokudai.ac.jp)

内容

- はじめに
- 地球流体力学的基礎
- 地球流体中の孤立波：ロスビーソリトン、不安定な場での孤立波
- 孤立擾乱の厳密解：モドン
- 単極渦の移動、渦と渦の相互作用 (途中まで)

これは 2009 年 12 月 7 日～9 日に九州大学大学院理学府地球惑星科学専攻で行われた講義で配布した講義ノート草稿 (未完成版) です。その時に気が付いた誤植は訂正し、また、図の一部は変更してあります。

(作図には地球流体電脳ライブラリを、また、特殊関数の計算には、'FORTRAN routines for computation of Special Functions' [<http://jin.ece.uiuc.edu/routines/routines.html>] を用いた)

(2010 年 2 月 19 日改訂版)

Chapter 1

はじめに

回転している世界には個性をそれなりに長時間維持する巨大な渦が多く見られる。例えば、木星の大赤斑、海洋中の暖水渦や冷水リング、台風等がある。木星の大赤斑はガリレオ以来存在し続けていると言われている。海洋中の暖水渦や冷水リング、これらは、黒潮やガルフストリームといった強い海流から切離したものであるが、1年以上の長きに亘って追跡されるものも多い。台風は1週間程度であるが、大気中の顕著な現象としては長寿である。台風は内部にエンジンを積んでいるが、海洋中の暖水渦等は、何ら強制を受けぬまま長く存在する。

流体の世界は基本的に非線形である。非線形な世界は、強い相互作用の世界なので、通常ぐちゃぐちゃになる。ぐちゃぐちゃを扱うことは極めて重要であるが、普通の人間の頭はぐちゃぐちゃをそのままでは理解できない。ぐちゃぐちゃを扱う場合にも、我々は如何にしてその中から規則性、すなわち、ぐちゃぐちゃでない世界を見出すかを考える。しかしこれは、未だに乱流が、その理論そのものまでも、ぐちゃぐちゃしていることから明らかなように容易ではない。非線形の世界を扱うとき、もう一つのアプローチは、ぐちゃぐちゃしてないものをまず調べ、それを足掛かりに先に進もうというものである。ここでお話しする孤立擾乱・孤立渦の研究は、その中心のひとつであった。

渦のような孤立擾乱が何故興味深いのか。まず一つには、ロスビー波が存在する媒質中に孤立しているという点である。ロスビー波は分散性波動なので、線形擾乱は初期に孤立していてもロスビー波に分解し、壊れてしまう。非線形はぐちゃぐちゃにすると考えていたところに、非線形故にぐちゃぐちゃしないものがある。これが非線形の孤立擾乱である。孤立擾乱の理論は、大赤斑や海洋中の渦等に適用されてきた。これらが本当に、それぞれの現象の説明になっているかどうかは必ずしも明らかではないが、明記された条件下では正しく、かつ、理解可能な解の存在は世界の理解に確実な足場を与えることになる。渦を考えることのもう一つの意味は、これは 面に限らないが、この世界のぐちゃぐちゃ

の実態は渦と渦の相互作用であり、それ故、まずは、個々の渦の力学を正しく理解することから始めようということにある。その目的のために、解析的に扱える問題を中心に選んだ。

この授業では、まず次章で地球流体力学の簡単な復習を行う。特に、円形のロスビー波解、および、線形の場合の同心円状の初期擾乱はどうなるかを見してみる。その後、3章で、面上の弱非線形の孤立擾乱であるロスビーソリトン、および、その応用として、潜在的に傾圧不安定な場での孤立擾乱の成長について考える。4章では、 β 平面上の強非線形解であるモドンを導出する。モドン同士の相互作用や、数値実験で同心円状の解から現れるモドンについても紹介する。第5章では、渦の南北移動について考える。ここではまず、レンズ渦を考える。レンズ渦というのは重い流体の上に乗った軽い流体、もしくは、密度躍層中の中立的な流体からなる高気圧性の渦である。さらに、低気圧性渦の南北移動についても言及する。そして余裕があれば、数値実験に基づく渦と渦の相互作用の定性的な話もしたい。

Chapter 2

地球流体力学的基础

ここでは地球流体力学の基礎方程式 (浅水方程式系) と準地衡流方程式、ならびに、ロスビー波についてみていく。なお、私は、海洋物理屋なので、方程式系その他は、基本的には海洋的状况もしくは回転水槽的状况、すなわち、圧縮性はなく、上下に境界がある流体を考える。

2.1 流体の方程式

日常流体はニュートン力学に従う。ニュートン力学において重要なのは、まずは、質量の保存である。

$$\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} = -\nabla \cdot \mathbf{v} \quad (2.1)$$

ここで、 ρ は密度、 $\mathbf{v} = iu + jv + kw$ は流速 (i, j, k はデカルト座標系における基本ベクトル)。 D/Dt はラグランジュ微分 (物質微分)。流速の発散、 $\nabla \cdot \mathbf{v}$ は体積の変化率である。体積が増えた分だけが密度が減る。

運動方程式は「運動量の時間変化は加えられた力に等しい」というもの：

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - \nabla\phi + \nu \nabla^2 \mathbf{v} \quad (2.2)$$

流体の密度は、圧力や温度等の関数であり、その関数形は状態方程式により与えられる。そして、系を閉じるには熱力学方程式も必要となる。他方、音波に比べて運動が十分に遅ければ流体は非圧縮として扱うことが可能になる。一般には、非圧縮近似を用いることは、 $D\rho/Dt = 0$ を用いることを正当化するものではないが、ここでは、面倒なので、加熱冷却もなく、密度はラグランジュ保存量だとする。すなわち、(2.2) と

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (2.3)$$

$$\frac{D\rho}{Dt} = 0 \quad (2.4)$$

を連立させて解く。さらに、 ρ はほぼ一定で、平均値を ρ_0 とし、 $|(\rho - \rho_0)/\rho_0| \ll 1$ を仮定する。この場合、流体には上面と下面が存在し、上下に挟まれているとして扱う。このような状況であっても、ここで扱うような問題に関しては、運動の本質は変わらない。

2.1.1 渦度、循環、ポテンシャル渦度

回転系での (回転周期に比べて) ゆっくりとした運動を考える場合、最も重要なのは循環定理、もしくは、ポテンシャル渦度の保存である。渦度は

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \boldsymbol{v}$$

渦度ベクトルは非発散である ($\nabla \cdot \boldsymbol{\omega} = \nabla \cdot \nabla \times \boldsymbol{v} = 0$)。渦度ベクトルを繋いだものを渦線という。渦度ベクトルが非発散なので、渦線は途切れることはない。

循環は

$$\Gamma = \oint_C \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{r} = \int \int_A \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{n} dA$$

である。ここで、 C は閉曲線、 A は C を縁とする面、 $d\boldsymbol{r}$ は C に沿うベクトル要素、 \boldsymbol{n} は面 A に垂直な単位ベクトル。閉曲線 C と交わる渦線により構成される管を渦管という。1本の渦管を考えると渦管内の渦度の総量はどこでも等しい。したがって、1本の渦管を考えると、細いところの方が太いところよりも渦度の大きさの断面平均は大きい。

循環の強さは、その内部にある渦度の総量である。したがって、渦度があるとその周りにはその周りをまわるような流れが生じることになる。例えば、 $r < r_0$ の円領域で渦度 ω_0 であり、その外側では渦度ゼロとする。その時、循環は渦度の面積分なので、 $r > r_0$ では $\Gamma = \pi r_0^2 \omega_0$ となる。 $r > r_0$ の円を C に取ったとき、循環は流速 $v(r)$ を用いて、

$$\Gamma = \oint_C \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{r} = 2\pi r v(r)$$

と書けるので、

$$v(r) = \frac{\omega_0 r_0^2}{r}$$

となり、 $r > r_0$ での流速は $1/r$ に比例する。これはランキン渦である。

密度が圧力のみ関数であれば、

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = 0 \tag{2.5}$$

となる。これをケルビンの循環定理という。この式は、流体とともに流されるある閉曲線 C に囲まれた領域 A を通過する渦度ベクトルは、時間的に不変であることを意味する。

断面積 A の渦管の長さ h の部分を考える。 h は小さく、その範囲内では A は一定とする。 そうすると体積は hA であり、質量は ρhA である。 質量の保存を用いれば、循環定理は

$$\frac{D}{Dt} \frac{\bar{\omega}}{\rho h} = 0$$

と書ける。ここで、 $\bar{\omega}$ は断面 A を通過する渦度の平均である。この $\bar{\omega}/\rho h$ をポテンシャル渦度 (渦位) という。

2.1.2 成層流体中でのポテンシャル渦度

循環の保存, (2.5) が成り立つためには、密度が圧力のみ関数、すなわち、 $\rho = \rho(p)$ 、である必要があったが、

$$\frac{D\lambda}{Dt} = 0 \tag{2.6}$$

を満足する λ が、 p と ρ のみの関数 ($\lambda(p, \rho)$) の場合、 λ 一定の面上に C を取れば、 $\rho = \rho(p)$ で無い場合にも同じことが言える。この場合、 λ も C も流されるだけなので、 λ 一定の面上の C は常にその面上にあり、 ρ は p と λ のみの関数 ($\rho = \rho(p, \lambda)$) なので、 (λ は一定より) この面上では ρ は p のみの関数と見なせるからである。非圧縮の場合には、 λ として、密度 ρ を、圧縮性のある場合には、 λ としては温位を取ればよい。密度一定の場合は任意の物質面を取れば良い。

次に、 C を通過する渦線からなる渦管の、 $\lambda = \lambda_1$ と $\lambda = \lambda_2$ に挟まれた部分を考える。この部分は物質面に囲まれているので、その質量は一定である。渦管の断面積が $\lambda = \lambda_1$ と $\lambda = \lambda_2$ の間で (二つの面の距離は十分に小さく) 一定と見なせるならば、その質量は

$$M = \rho Ah \tag{2.7}$$

である。ここで、 h は $\lambda = \lambda_1$ の面と $\lambda = \lambda_2$ の面の間の距離。よって、 C 内で ω 一定と見做せる場合 (C で囲まれる領域を十分に小さく取った場合) には

$$\Gamma = \frac{M\omega \cdot \mathbf{n}}{\rho h} \tag{2.8}$$

となる。他方、

$$\nabla\lambda = \lim_{\lambda_2 \rightarrow \lambda_1} \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)\mathbf{n}}{h} \tag{2.9}$$

なので、 \mathbf{n}/h を $\nabla\lambda/(\lambda_1 - \lambda_2)$ で置き換えることができ、 M 一定を考慮すると、 (一定の係数には意味がないので、それらを除き) 循環の保存は

$$\frac{D}{Dt} \frac{\omega \cdot \nabla\lambda}{\rho} = 0 \tag{2.10}$$

と書き変えることができる。この

$$Q = \frac{\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla \lambda}{\rho} \quad (2.11)$$

がポテンシャル渦度である。この場合、ポテンシャル渦度は流体粒子毎に定義される。

何れにせよ、意味的には、流体粒子の角運動量に対応するポテンシャル渦度はLagrange的に保存し、2つの物質面間の距離が変化すれば、それに見合うだけ、物質面に直交する渦度の成分が変化するということである。循環定理そのもので何ら変更はない。

2.2 回転流体の方程式

角速度 Ω で回転する回転系での運動方程式は、

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v} + \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - \nabla \phi + \nu \nabla^2 \mathbf{v} \quad (2.12)$$

左辺第2項と第3項を右辺に移せば、それぞれ、コリオリ力と遠心力となる。

2.2.1 遠心力と等ポテンシャル面

遠心力は、 r の回転軸に垂直な成分を r_p とすると、

$$-\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r} = \nabla \left[\frac{1}{2} |\boldsymbol{\Omega}|^2 |\mathbf{r}_p|^2 \right] = -\nabla \phi_c$$

と書けるので、重力ポテンシャルを

$$\Phi = \phi + \phi_c$$

とすることによって重力の中に入れられることができる。式は

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - \nabla \Phi + \nu \nabla^2 \mathbf{v} \quad (2.13)$$

となる。

回転系の住人から見たとき、引力と遠心力に区別はない。それ故、両方を合わせたものが重力となる。宇宙(慣性系)から見たときには、遠心力は存在しない。引力のみが重力である。それ故、慣性系から見たときの等ポテンシャル面と回転系から見たときの等ポテンシャル面は異なる。これが、回転系において高気圧性の渦の存在を許している。

圧力の高低は、当然のことながら、等ポテンシャル面上で比較することになる。慣性系では中央の圧力の高い渦というものは存在できないが、回転系では等ポテンシャル面が歪んでいるため、そして、全体の回転との差を見ているため、中央の圧力が高い渦というものが存在可能になる。慣性系から見ればそれは、単に、回転が遅い、低圧度の小さいところに過ぎない。(地球の等引力ポテンシャル面上で見れば、極で圧力は最小、赤道で最大である)

2.2.2 コリオリ項、地衡流

(2.13) の左辺第 2 項はコリオリの項である。球面極座標では、

$$\frac{Du}{Dt} - \left(2\Omega + \frac{u}{r \cos \theta}\right) (v \sin \theta - w \cos \theta) = -\frac{1}{\rho r \cos \theta} \frac{\partial p}{\partial \phi} + \text{粘性項} \quad (2.14)$$

$$\frac{Dv}{Dt} + \frac{wv}{r} + \left(2\Omega + \frac{u}{r \cos \theta}\right) u \sin \theta = -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \text{粘性項} \quad (2.15)$$

$$\frac{Dw}{Dt} - \frac{v^2}{r} - \left(2\Omega + \frac{u}{r \cos \theta}\right) u \cos \theta = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} - g + \text{粘性項} \quad (2.16)$$

となる。ここで、 ϕ, θ, r は経度、緯度、地球中心からの距離、 u, v, w はその方向の流速で、

$$g = -|\nabla\Phi|,$$

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{u}{r \cos \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} + \frac{v}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + w \frac{\partial}{\partial r}$$

である。

地球上の流体運動を考える場合、定量的にはこの球面極座標での議論が必要になるが、球面座標での理論展開は必ずしも見通しがよくなく、かつ、多くの場合、定性的には局所直交直線座標で十分議論することが可能である。この局所座標は、緯度 $\theta = \theta_0$ 、経度 ϕ_0 、 $r =$ 地球半径 (a) に接する平面を考え、

$$x = (\phi - \phi_0)a \cos \theta_0, \quad y = (\theta - \theta_0)a, \quad z = r - a \quad (2.17)$$

によって与えられる。地球の自転による速度、 $r\Omega$ 、に比べて流速がずっと小さく、かつ、 $|x/a|$ 、 $|y/a|$ 、 $|z/a|$ がすべて 1 よりずっと小さいという仮定の下で、 (x, y, z) 成分の方程式はそれぞれ

$$\frac{Du}{Dt} - fv + \hat{f}w = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} + \text{粘性項} \quad (2.18)$$

$$\frac{Dv}{Dt} + fu = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial y} + \text{粘性項} \quad (2.19)$$

$$\frac{Dw}{Dt} - \hat{f}u = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\rho}{\rho_0} g + \text{粘性項} \quad (2.20)$$

となる。ここで、 f と \hat{f} は地球の自転ベクトルの 2 倍、 2Ω 、の鉛直並びに北向き成分、

$$f = 2\Omega \sin \theta, \quad \hat{f} = 2\Omega \cos \theta \quad (2.21)$$

である。

密度を $\rho(x, y, z, t) = \rho_0 + \bar{\rho}(z) + \rho'(x, y, z, t)$ と平均密度 + 静止状態の密度分布 + 変動成分に分離する。圧力も静止状態でのもの $\bar{p}(z)$ と変動成分 p' に分ける。そうすると (2.20) は

$$\frac{Dw}{Dt} - \hat{f}u = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial z} - \frac{\rho'}{\rho_0} g + \text{粘性項} \quad (2.22)$$

となり、(2.18), (2.19) の圧力も p' になる。

通常、 \hat{f} の項は無視される。また、鉛直方向の運動方程式は静水圧の関係式で近似される。これは、大気や海洋の長い時間スケールをもつ現象に対しては、水平スケール (100km ~ 10000km) に比べて鉛直スケール (1km ~ 10km 程度) が十分に小さいという事実から導かれる。そして、この事実は大気や海洋が成層流体であることにより鉛直方向の運動が押さえられるということから説明される。

以下では、 \hat{f} は無視し、かつ、

$$f = 2\Omega \sin \theta \simeq 2\Omega \sin \theta_0 + \frac{2\Omega}{a} \cos \theta_0 y = f_0 + \beta y \quad (2.23)$$

という β 平面近似した局所直角座標系で考える。ここで、 $|\beta y| \ll f_0$ である。また、 $1/f$ よりも十分に長い時間スケールで、かつ、ロスビー数 U/fL は十分に小さく、地衡流平衡が良い近似で成り立っているとする。すなわち、近似的には

$$-f_0 v = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x}, \quad f_0 u = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial y}, \quad (2.24)$$

地衡流流線関数 $\psi = p' / (\rho f_0)$ を用いれば、

$$v = \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad u = -\frac{\partial \psi}{\partial y}. \quad (2.25)$$

2.2.3 ポテンシャル渦度

ポテンシャル渦度 (2.11) で、地球自転の渦度 (惑星渦度) と地球に相対的な流体運動の渦度を分離すると

$$Q = \frac{(2\Omega + \omega) \cdot \nabla \lambda}{\rho} \quad (2.26)$$

となる。 λ 一様面が水平と見なせるとすれば、

$$Q = \frac{f + \zeta}{\rho} \frac{\partial \lambda}{\partial z} \quad (2.27)$$

と書ける。ここで、 ζ は相対渦度の鉛直成分。ポテンシャル渦度は保存するので、流体が北へ移動すれば、 f が増加した分だけ、 ζ が小さくなる、もしくは、負で絶対値が大きくなることになる。

惑星渦度が緯度の関数となるのは、ケルビンの循環定理に基づけば、閉曲線 C を赤道面への投影したときの面積 A が緯度が低くなりにしたがって小さくなり、 C の内側を通過する惑星渦度の総量が減ることによる。その分を流体の運動で補わなければいけない。

2.3 準地衡流渦度方程式

地衡流平衡 (2.24) は圧力と流れの場を結び付ける極めて有効な関係式を与える。しかし、それ自体からは場の発展を計算することはできない。地衡流場の発展は地衡流平衡していない部分に支配される。そこで、(2.18), (2.19) で渦度方程式を立てる (\hat{f} の項は落す)。そうすると、地衡流平衡の項 (コリオリ項と圧力傾度力の項) が落ち、かつ、渦度方程式の各項は地衡流流線関数で表せるようになる。それを準地衡流渦度方程式と言う。

2.3.1 1層モデル

準地衡流渦度方程式の導出法は複数あるが、ここでは、ポテンシャル渦度 (2.27) を地衡流流線関数で表現することにより導出する。まず、鉛直軸周りの渦度のみを持つ、密度一定な1層の場合を考える。1層の場合、(2.27) は

$$Q = \frac{f + \zeta}{h} \quad (2.28)$$

と書ける。ここで、 h は層の厚さである。 Q はラグランジュ的な保存量なので、 $h = H, f = f_0$ の時に相対渦度ゼロであった流体の相対渦度 ζ は

$$\zeta = \frac{f_0 h}{H} - f$$

となる。この式の意味するところは、 $f = f_0$ であれば、流体の厚さが薄く (厚く) なれば ζ/f_0 は負 (正)。 $h = H$ であれば、北へ (南へ) 行けば、 ζ は負 (正) になるということである。この場合、地衡流が成立するためには、 $|\zeta/f|$ が小さくなければいけないので、 $|h - H|/H \leq O(\varepsilon)$, $|\beta y|/f_0 \leq O(\varepsilon)$ であることが必要となる。ここで、 $\varepsilon = U/f_0 L$ はロスビー数である。

さて、実際に準地衡流渦度方程式を導出するために、流体の上面は水面であるとする (回転水槽のイメージ)。平均水面の高さを H とするとき、流体の厚さは、底の地形と水面の変位により、

$$h = H + \eta_s(x, y, t) - \eta_b(x, y) \quad (2.29)$$

ここで、 η_s は水面の変位、 η_b は凸凹の底の高さ。 $\eta_s/H \leq O(\varepsilon)$, $\eta_b/H \leq O(\varepsilon)$ なので、

$$Q = \frac{f + \zeta}{H + \eta_s - \eta_b} \simeq \frac{1}{H} (f_0 + \beta y + \zeta) \left(1 - \frac{\eta_s - \eta_b}{H} \right) = \frac{f_0}{H} + \frac{1}{H} \left(\beta y + \zeta - \frac{f_0(\eta_s - \eta_b)}{H} \right) + \dots \quad (2.30)$$

となる。圧力は、その上の水の重さなので、 $p' = \rho_0 g \eta_s$ 。したがって、 $\psi = g \eta_s / f_0$ 。これを代入すると

$$Q = \frac{f_0}{H} + \frac{1}{H} \left(\beta y + \nabla_H^2 \psi - \frac{f_0^2}{gH} \psi + \frac{f_0 \eta_b}{H} \right) + \dots$$

となる。変動する部分は第2項だけなので、また、渦位を流す流れも地衡流で近似できるので、

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial q}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial q}{\partial x} = 0 \quad (2.31)$$

となる。ここで、

$$q = \nabla_H^2 \psi + \beta y - \frac{f_0^2}{gH} \psi + \frac{f_0 \eta_b}{H} \quad (2.32)$$

が準地衡流のポテンシャル渦度である。なお、(2.31)はヤコビアン $J(A, B) = A_x B_y - A_y B_x$ を用いて、

$$\frac{\partial q}{\partial t} + J(\psi, q) = 0 \quad (2.33)$$

と書かれることも多い。

2.3.2 連続成層モデル

連続成層の場合も同様である。ここでは、非圧縮を仮定し、 $\lambda = \rho$ とする。

$$Q = \frac{f + \zeta}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial z} \quad (2.34)$$

この式の伸縮の効果を表す $\partial \rho / \partial z$ は等密度面間の距離でその密度差を割ったもの、 $\simeq (\rho_1 - \rho_2) / (z(\rho_1) - z(\rho_2))$ である。静止状態での ρ_1 面の z 座標を z_1 とし、運動に伴う密度面の鉛直変位を η_1 とし、

$$z(\rho_1) = z_1 + \eta_1$$

と書く。そのようにすれば、

$$\frac{\partial \rho}{\partial z} = \lim_{z_2 \rightarrow z_1} \frac{\rho_1 - \rho_2}{(z_1 - z_2) + (\eta_1 - \eta_2)} \simeq \lim_{z_2 \rightarrow z_1} \frac{\rho_1 - \rho_2}{z_1 - z_2} \left[1 - \frac{\eta_1 - \eta_2}{z_1 - z_2} \right] = \frac{d\bar{\rho}}{dz} \left[1 - \frac{\partial \eta}{\partial z} \right].$$

ここで、1層の場合と同様に、 $|\eta_1 - \eta_2| / |z_1 - z_2| \ll 1$ とした。また、ここで、 $\bar{\rho}(z)$ は静止状態での成層を表す。ここで現れる伸縮の項 $\partial \eta / \partial z$ は $\rho = \bar{\rho}(z) + \rho'(x, y, z, t)$ としたとき、

$$\rho'(x, y, z, t) = \bar{\rho}(z - \eta(x, y, z, t)) \simeq -\frac{d\bar{\rho}}{dz} \eta(x, y, z, t)$$

なので、密度変動 ρ' で表すことができる。さらに、静水圧の関係、 $0 = (1/\rho_0) \partial p' / \partial z - (g/\rho_0) \rho'$ および地衡流流線と圧力関係、 $\psi = (1/\rho_0 f_0) p'$ より、

$$\eta = -\frac{f_0}{N^2} \frac{\partial \psi}{\partial z}. \quad (2.35)$$

ここで、 N は浮力振動数 $\left(= \sqrt{-\frac{g}{\rho_0} \frac{d\bar{\rho}}{dz}} \right)$ 。これより、

$$\frac{\partial \eta}{\partial z} = -\frac{\partial}{\partial z} \frac{f_0}{N^2} \frac{\partial \psi}{\partial z}$$

となる。

上のことおよび $\zeta = \nabla_H^2 \psi + f_0 O(\varepsilon^2)$ を用いると (2.34) は、1層の場合と同様に

$$\begin{aligned} Q &\simeq \frac{f_0 + \beta y + \nabla_H^2 \psi}{\rho_0} \frac{d\bar{\rho}}{dz} \left[1 + \frac{\partial}{\partial z} \frac{f_0}{N^2} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right] \\ &= f_0 \frac{d\bar{\rho}}{dz} \left\{ 1 + \frac{1}{f_0} \left(\nabla_H^2 \psi + \beta y + \frac{\partial}{\partial z} \frac{f_0^2}{N^2} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) + O(\varepsilon^2) \right\} \end{aligned} \quad (2.36)$$

となる。渦位 Q はラグランジュ保存量である。 D/Dt も地衡流で近似する。地衡流は水平非発散である。それ故、地衡流近似が良い精度で成り立つということは、鉛直移流の水平移流への比は $O(\varepsilon)$ ということになる。したがって、鉛直移流項は無視でき、1層とまるっきり同様に、

$$\frac{\partial q}{\partial t} + J(\psi, q) = 0 \quad (2.37)$$

$$q = \nabla_H^2 \psi + \beta y + \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{f_0^2}{N^2} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right\} \quad (2.38)$$

となる。なお、鉛直流はある密度 ρ の面の高さの静止状態からの変位を η とすると、その高さでは $w = d\eta/dt$ である。したがって、(2.35) より

$$w = - \left[\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \right] \left\{ \frac{f_0}{N^2} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right\} \quad (2.39)$$

を得る。連続成層の場合の底面での境界条件は、地形やエクマン層による鉛直流をこの w に等しいと置けば良い。もしそれらの効果がなければ、底での境界条件は、

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \right] \left\{ \frac{f_0}{N^2} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right\} = 0 \quad (2.40)$$

となる。

2.3.3 2層モデル

理論的に扱う場合、連続成層よりも多層モデルの方が便利な場合が多い。特に、2層あれば、傾圧不安定など大気海洋で重要な現象を表現できるので、理論研究には2層モデルが用いられることが多い。2層モデルの導出は、1層と同様にすれば良い。

$$\frac{\partial q_j}{\partial t} + J(\psi_j, q_j) = 0 \quad (2.41)$$

ここで、 $j = 1$ が上層、 $j = 2$ を下層とし、 q_j は

$$q_1 = \nabla_H^2 \psi_1 - \frac{f_0^2}{gH_1} \psi_1 - \frac{\rho_0 f_0^2}{\Delta \rho g H_1} (\psi_1 - \psi_2) + \beta y \quad (2.42)$$

$$q_2 = \nabla_H^2 \psi_2 - \frac{\rho_0 f_0^2}{\Delta \rho g H_2} (\psi_2 - \psi_1) + \beta y + \frac{f_0}{H_2} \eta_b \quad (2.43)$$

である。なお、(2.42)の右辺第2項は第3項に比べて非常に小さいので無視される場合も多い。それは、内部密度界面の変位の方が水面の変位に比べて十分に大きいからである。また、 ψ_1 もしくは ψ_2 をゼロとして一方の方程式のみを扱う場合もある。それは、reduced gravity modelとか、等価順圧モデル (equivalent barotropic model) とかと呼ばれる。例えば海洋なら、下層が分厚く、流れも上層に集中している。それ故にそのような扱いが可能になる。そのような単純化は大気の場合にも使われる。

2.3.4 無次元化

上では各変数を次元のある量として扱っている。しかし、このような摂動展開による発展方程式の導出においては、各項の大きさの比較が容易になるように無次元化するのが普通である。

無次元化においては、代表的な速度スケール U 、水平空間スケール L と鉛直スケール D を用いる(ここで、 U というのは速度そのものではなく速度の変化分で、 L や D は U 程度変化する距離だと思ふのが正しい)。この場合、無次元の流線などを*を付けて表現すると、

$$\psi = UL\psi_*, \quad \zeta = \frac{U}{L}\zeta_*$$

のような形になり、2層の方程式は、

$$\frac{\partial q_{*j}}{\partial t_*} + J_*(\psi_{*j}, q_{*j}) = 0 \quad (2.44)$$

$$q_{*1} = \nabla_{H_*}^2 \psi_{*1} - F_1 \psi_{*1} - F_{12}(\psi_{*1} - \psi_{*2}) + \beta_* y_* \quad (2.45)$$

$$q_{*2} = \nabla_{H_*}^2 \psi_{*2} - F_{21}(\psi_{*2} - \psi_{*1}) + \beta y + \eta_{b*} \quad (2.46)$$

ここで、

$$F_1 = \frac{f_0^2 L^2}{gH_1}, \quad F_{12} = \frac{\rho_0 f_0^2 L^2}{\Delta \rho g H_1}, \quad F_{21} = \frac{\rho_0 f_0^2 L^2}{\Delta \rho g H_2}, \quad \beta_* = \frac{\beta L^2}{U} = \frac{\beta L}{\varepsilon f_0}, \quad \eta_{b*} = \frac{f_0 L \eta_b}{U H_2} = \frac{\eta_b}{\varepsilon H_2},$$

である。

2.3.5 準地衡流方程式の構造

準地衡流近似は、相対渦度、ベータ、伸縮項の三者、それぞれを惑星渦度で割ったものが、全てロスビー数程度の大きさであるという条件下で導かれる発展方程式である。この場合、ポテンシャル渦は流線関数に対して線形になる。ポテンシャル渦度が線形であるため、高気圧と低気圧は対称であり、力学に区別はない。また、 $\psi \rightarrow -\psi$, $y \rightarrow -y$ という

変換に対して、方程式は不変である。このことは、高気圧が南に移動するのであれば、低気圧は北に移動するということである。

東西方向に定常に速度 c で進む解を考えると

$$\frac{\partial q}{\partial t} = -c \frac{\partial q}{\partial x}$$

なので、準地衡流渦度方程式は

$$J(\psi + cy, q) = 0$$

となる。この式は、 $\psi + cy$ が一定となる線 (c で動く座標系から見たときの流線) に沿って q が一定となることを意味する ($c = 0$ の場合を考えれば、 q はラグランジュ保存なので、流れに沿って一定となるのは当然である)。したがって、 q は $\psi + cy$ の関数。すなわち、

$$\nabla_H^2 \psi + \beta y + \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{f_0^2}{N^2} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right\} = G(\psi + cy) \quad (2.47)$$

のようになる。もし、関数 $G(X)$ が線形であれば、元々是非線形の方程式であるが、定常進行解に関しては線形になる。例えば、波の伝播する先、無限遠方 ($cx/|c| \rightarrow \infty$) で擾乱がない ($\psi \rightarrow 0$) であるとすると

$$\beta y = G(cy)$$

なので、関数 G は $G(X) = (\beta/c)X$ となる。この時、(2.47) は

$$\nabla_H^2 \psi - \frac{\beta}{c} \psi + \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{f_0^2}{N^2} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right\} = 0 \quad (2.48)$$

となる。この方程式は線形ではあるが、その解は振幅が小さいわけではない。準地衡流ポテンシャル渦度が線形であるが故に、このようにして、大振幅定常進行解を得ることが可能となる。

なお、上の準地衡流渦度方程式以外にも、パラメーターの大きさの取り方により地衡流近似の下でのポテンシャル渦度方程式はいくつも可能である。実際、密度成層を考慮すると、海洋の惑星スケールの現象に対しては、定常状態では相対渦度の項はそう重要ではなく、発散効果がより重要となり、 $1/h$ を線形化できない場合も出てくる。しかし、この準地衡流渦度方程式は、3つの効果、惑星 β 、相対渦度、発散 (渦柱の伸縮) の3つが入っており、力学を理解するためのモデル方程式としては非常によい。

2.4 ロスビー波

前節で導出した準地衡流渦度方程式は、中緯度のゆっくりとした流れを記述する。中緯度のゆっくりとした運動は、ほぼ地衡流平衡にあり、それはポテンシャル渦度の保存 (ケル

ピンの循環定理)に従う。この方程式により、重要な波動であるロスビー波であるとか、海洋循環の構造であるとかが、比較的容易に解析できる。この章では波動を考える。大気や海洋に見られる現象の多くは波動論からアプローチ可能であり、また、波動は、系に微小な擾乱が与えられた時、それがどのように系全体に影響を与えるかを見ることができ、システムの理解に有用である。

2.4.1 鉛直モード

連続成層の場合、(2.38)より、線形化された方程式は、

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\nabla_H^2 \psi + \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{f_0^2}{N^2} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right\} \right] + \beta \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \quad (2.49)$$

となる。ここでは水平伝播しか考えないので、 $z = 0, H$ にある固体面(底と蓋)で挟まれた流体を考える。この場合、

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} = 0 \quad \text{at } z = 0, H$$

である。境界条件が x, y, t によらないので、 $\psi(x, y, z, t) = \hat{\psi}(x, y, t)\Phi(z)$ と変数分離が可能になる。(2.49)は

$$\frac{1}{\partial \hat{\psi} / \partial t} \left[\frac{\partial}{\partial t} \nabla_H^2 \hat{\psi} + \beta \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial x} \right] = -\frac{1}{\Phi} \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{f_0^2}{N^2} \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right\} = \lambda^2 \quad (2.50)$$

と書ける。ここで、 λ^2 は分離定数である。この式より $\Phi(z)$ の式は、

$$\frac{d}{dz} \left\{ \frac{f_0^2}{N^2} \frac{d\Phi}{dz} \right\} + \lambda^2 \Phi = 0 \quad (2.51)$$

となる。境界条件は

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \quad \text{at } z = 0, H$$

で、 λ^2 を固有値とする固有値問題になる。仮に、 N が定数であれば、

$$\Phi(z) = a \cos \frac{N\lambda}{f_0} z$$

で境界条件を満足するためには、

$$\lambda = \frac{n\pi f_0}{NH}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

でなければならないことが分かる。 $n = 0$ の時は鉛直に一様であり、順圧モードと呼ばれる。これは N に依存しない。他方、 $n \leq 1$ のモードは等圧面と密度面が一致しないので

傾圧モード (第 n 傾圧モード) という。 N が定数でない場合も可付番無限個の λ が存在する。それを λ_n と書くと、水平の方程式は、

$$\frac{\partial}{\partial t} [\nabla_H^2 \hat{\psi} - \lambda_n^2 \hat{\psi}] + \beta \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial x} = 0 \quad (2.52)$$

である。この方程式は、水面が存在する 1 層の場合と同じであり、 λ_n^{-1} は第 n 傾圧モードの変形半径である。 $\lambda_n^{-1} = \sqrt{gH_n}/f_0$ を満足する H_n をそのモードに対する等価深度という。(以下では 1 層モデルもしくは単一の鉛直モードを扱うので添字の n は省略する)

2.4.2 平面波

平面波というのは、波面 (等位相面) が平面をなす波のことである。すなわち、

$$\psi = Ae^{i(kx+ly+mz-\sigma t)}$$

のような波を言う。ここでは、波の伝播は 2 次元なので、 mz の項は存在しない。若干、変な感じもするかも知れないが、

$$\hat{\psi} = Ae^{i(kx+ly-\sigma t)}$$

をここでは平面波と呼ぶ。この平面波の解を (2.52) に代入すると、

$$\sigma = -\frac{\beta k}{k^2 + l^2 + \lambda^2} \quad (2.53)$$

を得る。 x 方向の位相速度、 c_x は

$$c_x = \frac{\sigma}{k} = -\frac{\beta}{k^2 + l^2 + \lambda^2} \quad (2.54)$$

であり、西向きに伝播する。一般には、ロスビー波は f の緯度分布だけではなく、基本場のポテンシャル渦度が空間分布していれば存在する。渦位は、流体の厚さの空間的に変化、平均流による水平シアでも変化する。基本場の渦位に傾きがある場合、擾乱により渦位が平均場の渦位の大きな方に輸送されるとアノマリとしては負の渦位が生じる。負の渦位は時計回りなので、渦位の大きな方を右に見る方向で高渦位方向への流れを作る。それ故、高渦位を右に見る方向へ伝播する。 β が地形性 β であるなら、 $f_0 > 0$ (北半球) のときには、層の薄い方を右に見る方向、 $f_0 < 0$ (南半球) のときには厚い方を右に見る方向である。

ロスビー波の位相速度は、常にポテンシャル渦度の大きな方を右に見る方向を向いているが、群速度はどうだろう。 x 方向の群速度は、

$$c_{gx} = \frac{\partial \sigma}{\partial k} = \frac{\hat{\beta}(k^2 - l^2 - \lambda^2)}{(k^2 + l^2 + \lambda^2)^2} \quad (2.55)$$

なる。したがって、エネルギーは $k_0 = \sqrt{l^2 + \lambda^2}$ より k が小さければ (x 方向の波長が長ければ) 位相速度と同じ方向に進み、 $k > k_0$ ならば、位相速度とは逆方向に進むことになる。すなわち、エネルギーは両方に進むことができる。これは、例えば、ある場所の流体が、 \bar{Q} の大きな方向 ($+y$ 方向とする) へ動いた後、どのような運動が生じるかを考えれば分かりやすい。初期に $+y$ 方へ動いた流体の周りには、時計回りの流れが生じる。それ故、 $-x$ 側の流体は $+y$ 方向へ流され、 $+x$ 側の流体は $-y$ 方向へ流される。この流体の変位により、 $-x$ 側には時計回りの循環が、そして、 $+x$ 側には反時計回りの循環が生じる。位相は明らかに $-x$ 方向に進んでいる。しかし、運動は $+x$ 方向にも広がっていくことになる。

ちなみに、 y 方向の群速度は

$$c_{gy} = \frac{\partial \sigma}{\partial l} = \frac{2\hat{\beta}kl}{(k^2 + l^2 + \lambda^2)^2} \quad (2.56)$$

であり、 y 方向の位相速度の向きとは逆になる。これは内部重力波の鉛直伝播と事情は同じである。

2.4.3 円形波

波の性質を理解する上においては、上述の平面波が便利である。しかし、波源が局在している場合には、波が音波や光のような3次元伝播であれば、球面波に、また、水面波のようなものであれば、円形波になる。ロスビー波も円形の波の解を持つ。円形のロスビー波というのは、あまり出ては来ないが、この授業のように、渦を考える場合、渦は丸いので、これも調べておいた方が便利である。

ロスビー波の場合、必ず位相伝播は西向きなので、水面波と違って波面が等方的に広がるということはない。その代わりに、円形の構造を持ったまま西に伝播する解を持つ。(2.52)の解として、 $\hat{\psi}(x - ct)$ という、 c で伝播する解を考える。(2.52)は

$$-c \frac{\partial}{\partial x} [\nabla_H^2 \hat{\psi} - \lambda^2 \hat{\psi}] + \beta \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial x} = 0 \quad (2.57)$$

となり、 x で積分すると、

$$\nabla_H^2 \hat{\psi} + \left(-\lambda^2 - \frac{\beta}{c}\right) \hat{\psi} = 0 \quad (2.58)$$

を得る。平面極座標 (r, θ) で表記すると、

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \hat{\psi}}{\partial \theta^2} + \left(-\lambda^2 - \frac{\beta}{c}\right) \hat{\psi} = 0 \quad (2.59)$$

となる。ロスビー波の位相速度は $-\beta\lambda^{-2} \leq c \leq 0$ なので、ロスビー波を考える場合には、 $-\lambda - \beta/c > 0$ である。そこで、 $\kappa = \sqrt{-\lambda - \beta/c}$ と置く。また、解は変数分離して、

$$\hat{\psi}(r, \theta) = \sum_n \phi_n(r) \cos(n\pi\theta + \theta_0) \quad (2.60)$$

の形で考える。そうすると (2.59) は

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\phi_n}{dr} \right) + \frac{\kappa^2 r^2 - n^2}{r^2} \phi_n = 0 \quad (2.61)$$

となる。この方程式の解は $J_n(\kappa r), Y_n(\kappa r)$ というベッセル関数で表現される (J_n が n 次の第1種ベッセル関数、 Y_n が第2種のベッセル関数 = ノイマン関数: 章末の参考参照)。ベッセル関数、 $J_n(\kappa r), Y_n(\kappa r)$ 、は平面極座標における \sin, \cos だと思っていれば良い。なお、 $\kappa^2 < 0$ の場合には変形ベッセル関数 I_n, K_n が解になる。これは指数関数に対応する。

$J_n(\kappa r), Y_n(\kappa r)$ とともに波形 ($\kappa r \gg 1$ では波数 κ の平面波) であるが、 $Y_n(\kappa r)$ は $r = 0$ で無限大になるので、ロスビー波の解を構成するのは、 J_n となる。それぞれの成分は形を変えることなく、西方に伝播する (Figure 2.1)。

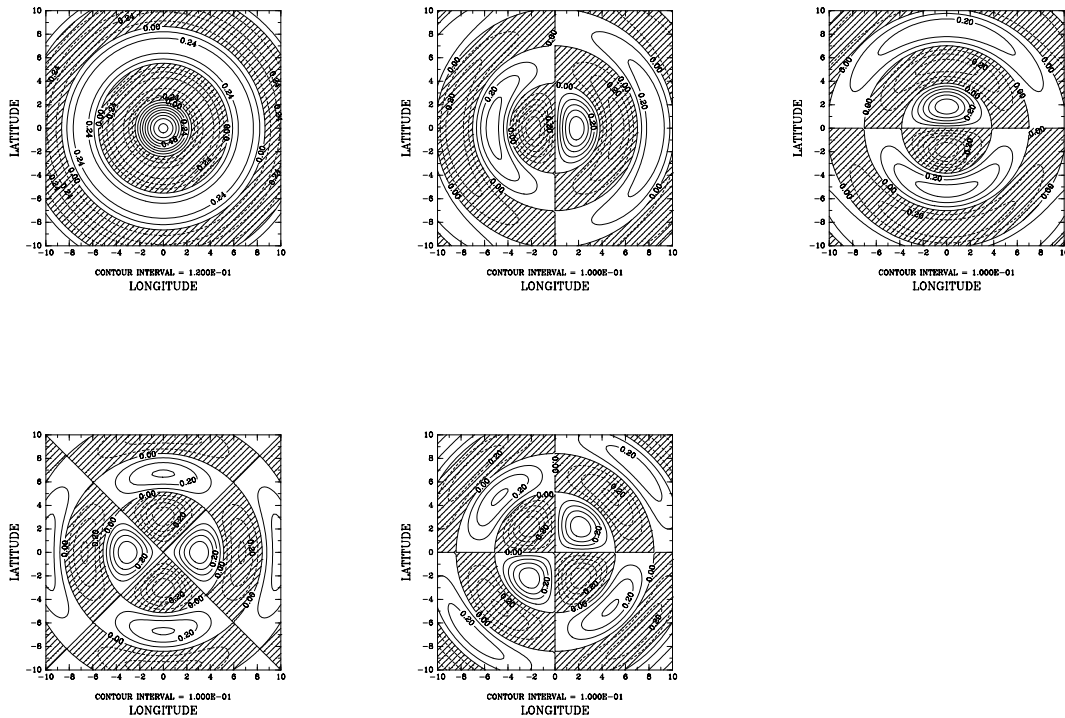


Figure 2.1: 円形ロスビー波 ((2.60) の形の解)。 $\kappa = 1., n = 0, 1, 2$ で \cos, \sin を描いている。

初期に同心円状のコンパクト (局在している、エネルギーが有限の) 擾乱があったとする。それは0次のベッセル関数の重ね合わせ、

$$g(r) = \int b(\kappa) J_0(\kappa r) \kappa d\kappa$$

の形で表現できる。係数 $b(\kappa)$ はフーリエ・ベッセルの積分定理

$$f(\kappa) = \int_0^\infty \int_0^\infty f(s) J_0(\kappa r) J_0(sr) r s dr ds$$

を用いて、

$$b(\kappa) = \int_0^\infty J_0(\kappa r) g(r) r dr$$

となる。その後の時間発展は、初期位置を原点に取れば、

$$\hat{\psi} = \int b(\kappa) J_0(\kappa[(x - c(\kappa)t)^2 + y^2]^{1/2}) \kappa d\kappa$$

と書ける。ここで、 $c(\kappa)$ は伝播速度： $c(\kappa) = -\beta/(\kappa^2 + \lambda^2)$ である。伝播速度が κ の関数なので、時間とともに分散していくことになる (Figure 2.2)。

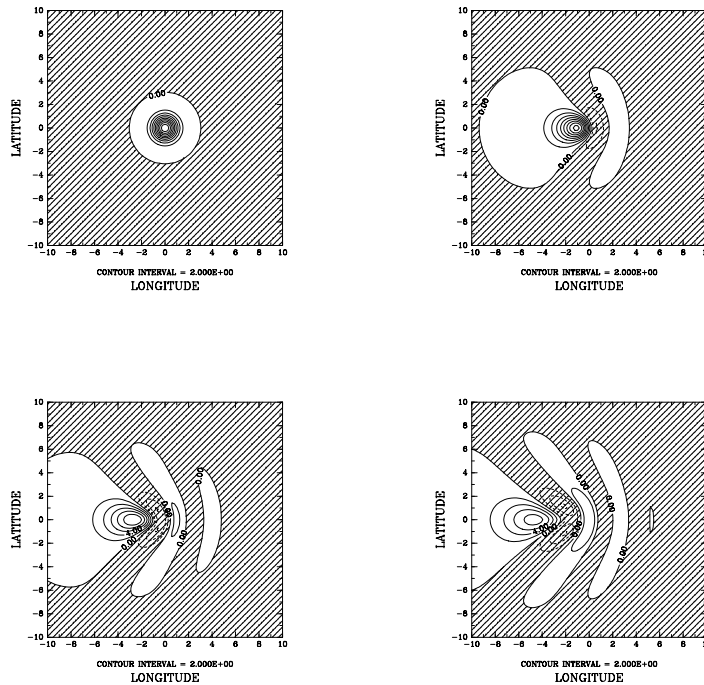


Figure 2.2: 同心円状の初期渦の線形時間発展。変形半径は図の目盛で 0.5, 時間は左上から右下に進み、ロスビー長波が距離 2.5(5 変形半径) 進むのに要する時間毎にプロット: この図の渦はほぼ gaussian

[参考：ベッセル関数]

$$\frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dw}{dx} + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right) w = 0 \quad (2.62)$$

の解を考えよう。これは、(2.61)において、 $x = \kappa r$ としただけのものである。 $x = 0$ は確定特異点であるが、原点で特異性を持たない解として、 J_n がある。 J_n は

$$J_n(x) = \frac{x^n}{2^n n!} \left\{ 1 - \frac{x^2}{2(2n+2)} + \frac{x^4}{2 \cdot 4(2n+2)(2n+4)} - \dots \right\}$$

と書け、これより、

$$J_{n+1}(x) = \frac{2n}{x} J_n(x) - J_{n-1}(x)$$

$$J'_n(x) = \frac{1}{2} \{ J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x) \}$$

$$\frac{d}{dx} \{ x^n J_n(x) \} = x^n J_{n-1}(x)$$

等の回帰関係を満たすことが分かる。

(2.62) には $x = 0$ で対数項を持つ解もある。それが第2種のベッセル関数 $J_n(x)$ (ノイマン関数 $N_n(x)$ とも呼ばれる) である。これは J_n と独立であり、 $x = 0$ で無限大になる。上の再帰関係を満足する。

関数の性質は調べ尽くされており、公式集を見れば便利な公式が山のように出ている。それらを適切に用いることにより、渦やロスビー波に関するいろいろな性質を理解することが可能になる。

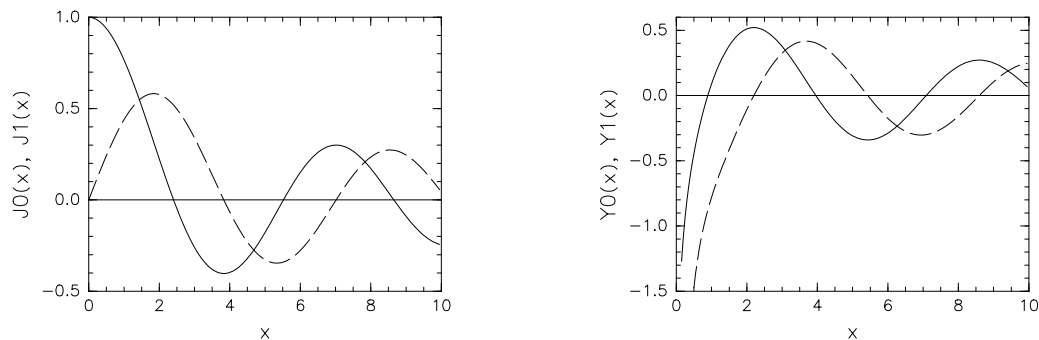


Figure 2.3: ベッセル関数。 $J_0(x)$, $J_1(x)$, $Y_0(x)$, $Y_1(x)$. (次数がゼロが実線、1が破線)

Chapter 3

地球流体中の孤立波：ロスビーソリトン・不安定系のソリトン

前節で見たように線形であれば、初期に孤立している擾乱も、分散性媒質であるために、ロスビー波としてバラバラになっていく、これを維持するのは非線形性である。理論世界では、解ける線形から出発し、非線形性により分散がどのように押さえられるのかという方向に少しずつ進むことになる。それ故、地球流体中の孤立渦のモデルとして最初に脚光を浴びたのはロスビーソリトン (孤立ロスビー波) である。しかし、ソリトン解 (孤立波解) そのものは、地球流体に限らず広く存在するので、この章では、まず、ソリトン解を持つ KdV 方程式、そして、その解であるソリトン解について述べ、その後その地球流体への応用を述べる。

3.1 KdV 方程式

通常の波は分散性がある。分散性のある系では、初期に一ヶ所にエネルギーを与えても、それは、成分波に分裂していく。これは位相速度が波数に依存することによる。しかし、非線形性が働いた場合、波が各波数成分に分裂することなく、一つの塊と伝播することが可能になる場合がある。このような孤立した安定な波を孤立波という。孤立波は、最初、19 世紀に英国の運河で、John Scott Russell によって見い出され、水槽実験により、伝播速度の振幅依存性などを調べている。この水面の孤立波を表す方程式は Korteweg と deVries により導出され、KdV 方程式と呼ばれる。KdV 方程式は

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + (c_0 + \alpha \phi) \frac{\partial \phi}{\partial x} + \gamma \frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} = 0 \quad (3.1)$$

の形をしている。水面波に対するこの方程式は、水平空間スケールを L 、深さを H とし、 $\delta = H/D \ll 1$ を用いて展開して導出する。ただ、ここでは、導出は行わず、水面波の分

散関係からこの式の成り立ちを見てみる。水面波の分散関係は、 c を位相速度、 k を波数とすると

$$c = \sqrt{\frac{g}{k} \tanh kH} \quad (3.2)$$

となる。長波極限 ($kH \ll 1$) では、 $\tanh kH \simeq kH$ なので、 $c = \sqrt{gH}$ 。これは津波の速度である。津波の速度は深さに依存する。平均水深を H とし、波の峰の高さを ϕ とすれば、峰でのローカルな水深は $H + \phi$ である。したがって、峰の進行速度は

$$\sqrt{g(H + \phi)} \simeq \sqrt{gH} \left(1 + \frac{\phi}{2H}\right)$$

となる。これが非線形性であり、非線形長波の方程式は振幅が小さければ

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \sqrt{gH} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\sqrt{gH}}{H} \phi \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0$$

次に分散性であるが、 $kH \ll 1$ として (3.2) を展開すると、

$$c = \sqrt{\frac{g}{k} \tanh kH} = \sqrt{gH} \left(1 - \frac{1}{6} k^2 H^2 + \dots\right) \quad (3.3)$$

となる。これは

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \sqrt{gH} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{1}{6} H^2 \frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} \right) = 0$$

の位相速度である。

したがって、 $c_0 = \sqrt{gH}$ と置くと、水面波に対する KdV 方程式は、

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + c_0 \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{c_0}{2H} \phi \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{c_0 H^2}{6} \frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} = 0 \quad (3.4)$$

となる。この方程式が成り立つための振幅と $\delta = H/L$ の関係は、

$$\frac{\phi}{H} \simeq \delta^2$$

である。

以上より明らかのように、長波速度が波の振幅に比例して変化し、長波での分散性が、 $c = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n k^{2n}$ という形であれば、弱非線形長波は KdV 方程式に従う。このような波は非常にありふれたものであり、それ故、多くの波がその長波極限において KdV 方程式に従う。なお、伝播速度の振幅依存性が振幅 2 乗に比例する場合は、非線形項が 3 次となるが、この場合は変形 KdV (mKdV) 方程式という。2 層で上下対称の場合や一様成層の場合に出てくる。

3.2 KdV 方程式の解

この方程式の定常進行解 ($\phi = \phi(x - ct)$ の形の解) は比較的容易に求めることができる。まず、定常進行解に関しては (3.1) は、 $\xi = x - ct$ とおいて

$$-c \frac{\partial \phi}{\partial \xi} + (c_0 + \alpha \phi) \frac{\partial \phi}{\partial \xi} + \gamma \frac{\partial^3 \phi}{\partial \xi^3} = 0 \quad (3.5)$$

この方程式を ξ で積分すると

$$(c_0 - c)\phi + \frac{\alpha}{2}\phi^2 + \gamma \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^2} = C_1 \quad (3.6)$$

さらにこの方程式に $\partial \phi / \partial \xi$ をかけて積分すると

$$\frac{\gamma}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right)^2 = C_2 + C_1 \phi - (c_0 - c) \frac{\phi^2}{2} - \frac{\alpha}{6} \phi^3 \quad (3.7)$$

を得る。両辺の平方根を取るにより 1 階微分の方程式を得る。したがって、これを積分し、解を得ることができる。解は Jacobi の楕円関数 cn を用いて、

$$\phi(\xi) = \phi_0 + a \text{cn}^2 \left(k_*^{-1} (\alpha a / 12 \gamma)^{1/2} \xi \mid k_* \right) \quad (3.8)$$

と書ける。ここで、 k_* は楕円関数の母数 (modulus) である ($0 \leq k_* \leq 1$)。波長は

$$\lambda = 4k_* (3\gamma / \alpha a)^{1/2} K(k_*)$$

と表せられる。ここで、 $K(k_*)$ は Jacobi の第 1 種完全楕円積分である。波の伝播速度は、

$$c = c_0 + \alpha \phi_0 + \frac{\alpha a}{3\gamma} [2 - k_*^{-2}]$$

であり、波長 (k_* に依存) と振幅に依存することが分かる。なお、Jacobi の楕円関数の性質と (3.8) の導出に関しては、参考として、下に記す。

$k_* a^{-1/2}$ を有限に保って k_* ゼロの極限をとると、線形波になる。 $k_* = 1$ では波長が無限大になり、孤立波解

$$\phi(\xi) = \phi_0 + a \text{sech}^2 \left((\alpha a / 12 \gamma)^{1/2} \xi \right) \quad (3.9)$$

になる。ここで、 $\text{sech} x = 2 / (e^x + e^{-x}) = 1 / \sinh x$ である。そしてこの時、波の速度は

$$c = c_0 + \alpha \phi_0 + \frac{\alpha a}{3\gamma}$$

であり、振幅が大きいくほど波の速度は大きくなる。また、孤立波の幅 $((12\gamma / \alpha a)^{1/2})$ は、振幅が大きくなるほど狭くなる。

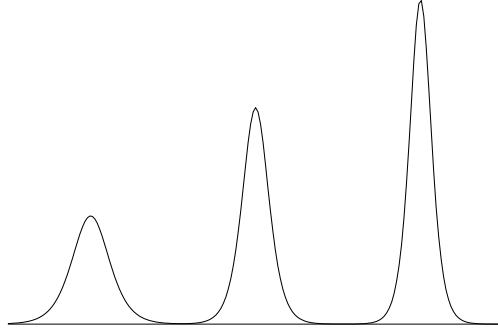


Figure 3.1: ソリトン解の振幅と幅

[参考:Jacobi の楕円関数]

Jacobi の楕円関数 $\text{cn}(u | k_*)$ は、 $\text{cn}^2 = 1 - \text{sn}^2$ で、 $\text{sn}(u | k_*)$ は

$$u = \int_0^\varphi \frac{d\psi}{\sqrt{(1 - \psi^2)(1 - k_*^2 \psi^2)}}$$

の逆関数、 $\varphi(u) = \text{sn}(u | k_*)$ で定義される。これは $k_* < 1$ では周期関数であり、

$$\text{sn}(u | 0) = \sin u, \quad \text{sn}(u | 1) = \tanh u, \quad \text{cn}(u | 0) = \cos u, \quad \text{cn}(u | 1) = \text{sech } u$$

である。また、

$$K(k_*) = \int_0^1 \frac{d\psi}{\sqrt{(1 - \psi^2)(1 - k_*^2 \psi^2)}}$$

を Jacobi の第 1 種完全楕円積分という。 $\text{sn}(K(k_*)) = 1$ であり、 $K(k_*)$ が $1/4$ 周期になる。楕円関数としては、 sn , cn 以外に、 $\text{dn}^2(u | k_*) = 1 - k_*^2 \text{sn}^2(u | k_*)$ を満足する dn も用いられる。

sn , cn , dn の微分は

$$\frac{d}{du} \text{sn}(u) = \text{cn}(u) \text{dn}(u), \quad \frac{d}{du} \text{cn}(u) = -\text{sn}(u) \text{dn}(u), \quad \frac{d}{du} \text{dn}(u) = -k_*^2 \text{cn}(u) \text{sn}(u),$$

となる。

(3.7) の解が cn で表現されるのは、 $\phi = a(1 - \psi^2)$ と置き、また、 $\xi = 0$ が峰であるとして、 $d\phi/d\xi|_{\xi=0} = 0$ とすると、(3.7) が

$$\xi = k_* (12\gamma/\alpha a)^{1/2} \int_0^\varphi \frac{d\psi}{\sqrt{(1 - \psi^2)(1 - k_*^2 \psi^2)}}$$

という形なるからである。なお、上の cn の微分より、(3.8) が (3.5) の解であることを直接確かめることもできる。

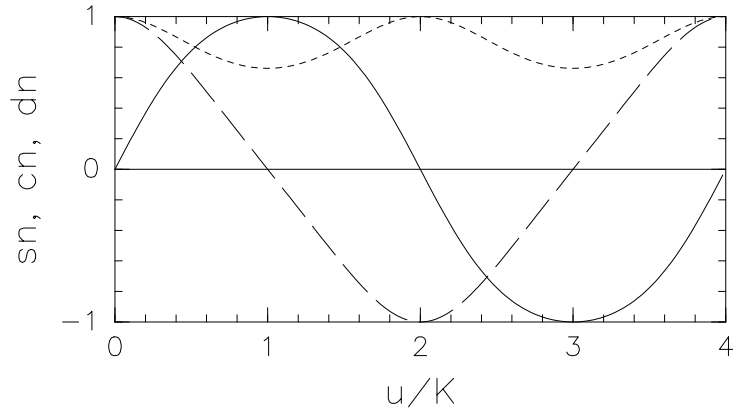


Figure 3.2: Jacob の楕円関数. 実線 sn, 破線 cn, 点線 dn. ($k_* = 3/4$, K は Jacobi の第 1 種完全楕円積分)

3.3 ソリトン解：時間発展

この KdV 方程式は長いこと省みられることはなかったが、Zabusky and Kruskal (1965) の研究により脚光を浴びることとなった。Zabusky and Kruskal は周期境界条件の下、sin 型の初期値で KdV 方程式を数値的に解いた。

初期波の波長は長く分散性は効かない。それ故、振幅の大きなところで波の速度は速く、波は前方に突っ立っていく。波の傾斜が急になると 3 階微分である分散性が効き始める。そして、孤立波に分裂する。孤立波の振幅は前方のものほど大きい。孤立波は振幅が大きいほど速い。それ故、孤立波列ばらけ、振幅の大きなものは後方から振幅の小さい孤立波にぶつかることとなる。ぶつかると何が起きるか。すり抜けるのである。非線形方程式であるから、それを構成する解は強く相互作用することが予想される。しかし、孤立波は、ぶつかっても壊れることはなく、すり抜けるのである。このような相互作用しても壊れない解の存在は驚きであり、粒子のように振る舞うことから、solitary wave に粒子性を表す接尾語 '-on' を用い、soliton(ソリトン)と名付けられた。

ソリトンの衝突(追い越し)の際には、振幅が減少する。これは線形波とは大きく異なる。

また、Zabusky and Kruskal はこれらのソリトンが再び 1 点で重なることにより元の sin 波に戻るという再帰性にも注目している。

それは扨措き、KdV 方程式に支配される系では、適当な有限振幅長波が励起されると、その長波は突っ立ち、勝手にソリトンを作り出すことになる。したがって、ソリトンは、上で述べたような、長波での分散性が弱く、長波速度が振幅に依存するような系では普通

に見られるであろうことが想像される。また、通信技術への応用も考えられた。

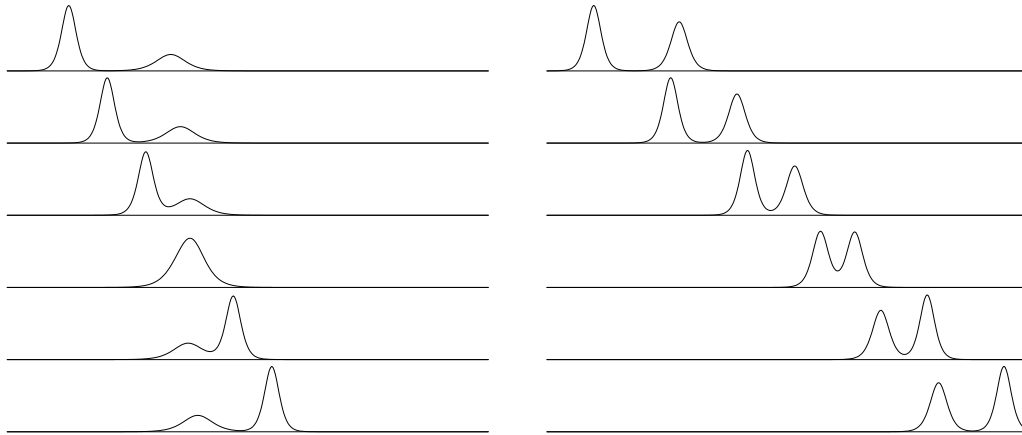


Figure 3.3: ソリトン-ソリトン相互作用。時間は上から下に進む。振幅差が大きい場合はすり抜けるように見えるが、差が小さな場合は離れたまま相互作用して、振幅が入れ替わる。左の図は振幅比 1:0.25、右の図は 1:0.75。広田の方法による。

[参考:多重ソリトンの解析解]

KdV 方程式の初期値問題の解法としては逆散乱法が有名である。逆散乱法というのは、KdV 方程式の解をポテンシャルとするシュレジンガー方程式の波動関数の時間発展を求め、それから、逆に、KdV 方程式の発展を求めるといった難解な方法である。これは初期値問題の厳密解を与える。他方、ソリトン解だけで KdV 方程式の解を表現できるわけではないが、主要部分は多重ソリトン間の相互作用で表現でき、多重ソリトンの相互作用は比較的簡単に解くことができる。この方法を直接法、もしくは、発見者に因んで広田の方法という。

詳細は除くが、 N ソリトン解は、

$$\phi = 2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln f, \quad f = \det M$$

$$M = (m_{ij}) = \delta_{i,j} + \frac{2\sqrt{k_i k_j} e^{-(\theta_i + \theta_j)}}{k_i + k_j}$$

$$\theta_i = k_i(x - \xi_i), \quad \xi_i = x_{0i} - (c_0 + 4k_i^2)t$$

と表現できる。ここで、 i, j は $1 \leq i, j \leq N$ であり、 x_{0i} は i 番目のソリトンの初期位置。また、 k_i は i 番目のソリトンの振幅を a_i とするとき、

$$k_i = \sqrt{\frac{\alpha a_i}{12\gamma}}$$

である。広田の方法については、例えば、広田本人による教科書、広田 (1992) を参照。

3.4 ロスビーソリトン

3.4.1 分散性と非線形性

先に述べたように、長波極限において弱分散であり、かつ、長波速度が振幅に依存すれば、弱非線形長波の方程式は KdV、もしくは、ソリトン解を持つ類似の方程式帰着できる。ではロスビー波はどうか？

簡単のために 1.5 層準地衡流モデルを考えよう。ロスビー波の分散関係は、 $k^2 \ll l^2 + R_d^{-2}$ では、

$$\sigma = -\frac{\beta k}{k^2 + l^2 + R_d^{-2}} \simeq -\beta k \left(1 - \frac{k^2}{l^2 + R_d^{-2}} + \dots \right)$$

となるので、長波の分散関係は KdV 方程式と同じになる。他方、非線形性についてはどうか。一定速度 c で擾乱が移動するときの準地衡流渦度方程式は

$$J(\psi + cy, \nabla_H^2 \psi - R_d^{-2} \psi + \beta y) = 0$$

なので、

$$\nabla_H^2 \psi - R_d^{-2} \psi + \beta y = G(\psi + cy) \quad (3.10)$$

$x \rightarrow -\infty$ で $\psi \rightarrow 0$ とすると、 $G((\psi + cy)) = \frac{\beta}{c}(\psi + cy)$ となり、

$$\nabla_H^2 \psi - R_d^{-2} \psi - \frac{\beta}{c} \psi = 0 \quad (3.11)$$

となる。方程式は振幅の 1 次の項しか含まないので、伝播速度が振幅に依存しないことが分かる。すなわち、静止流体中の準地衡流ロスビー波はソリトンにはなり得ない。ロスビーソリトンが存在するためには非線形性が生じるような状況を考える必要がある。

非線形性を含める第 1 の方法は、流体層の厚さの振幅依存性を含めるというものである。ロスビー長波の速度は $-\beta R_d^2 = -\beta g' H / f^2$ であり、準地衡流近似では R_d は一定だが、流体層の厚さは高圧渦に対しては正である。したがって変形半径よりも十分に大きなスケールを考えるとロスビー波速度は振幅に依存するようになる。このようにして孤立波解を持つ方程式を導出することができる。この非線形ロスビー波は南北に伸びた形になるので、ここではこれについては述べない。

もう一つの方法は南北シアをもつ東西流を背景流として考える方法である。(3.10) の $G(\psi + cy)$ を求めるとき、流れがないとした。流れがなければ (もしくは一様東西流であるならば)、 G は線形である。しかし、平均帯状流が南北シアを持つと非線形になる。例えば、 $\Psi(y) = sy^2$ という背景流を考えよう。 $x \rightarrow -\infty$ で $\psi \rightarrow \Psi(y)$ とすると、(3.10) は

$$s - sR_d^{-2}y^2 + \beta y = G(sy^2 + cy) \quad (3.12)$$

$\phi = sy^2 + cy$ と置くと、

$$G(\phi) = s - R_d^{-2}\phi - \frac{c(R_d^{-2}c + \beta)(1 - \sqrt{1 - 4sc^{-2}\phi})}{2s}$$

となる。ここで、 $s \rightarrow 0$ で $G(\phi)$ が発散しないという条件を用いた。このように $G(\phi)$ は ϕ に対して非線形となる。

定常進行解では c で動く座標系で見ると、遠方で流線と渦位の関係が決まっている。そして、擾乱の流線の振幅 ϕ が大きいということは、ある緯度で見たとき、それだけ南北距離の大きな初期位置を持つ流体が流れてくるということである。南北シアが無い場合、擾乱の存在しないところでの流線は $\Psi = -Uy + cy$ (ここで U は一様流を表す定数) となり、流線とポテンシャル渦度 βy が線形になる。すなわち、擾乱の流線とポテンシャル渦度アノマリの振幅は振幅によらず比例し、ロスビー波速度は振幅に依存しない。他方、シアがある場合には、流線と渦位の線形関係が線形でなくなるため、ポテンシャル渦度アノマリの振幅と擾乱の流線値の比は、振幅に依存するようになる。つまり、解は振幅に依存する。これが非線形性である。

3.4.2 KdV 方程式の導出と地球惑星流体への適用

準地衡流方程式から KdV 方程式の導出は、順圧モデルに関しては、Long (1964), Larsen (1964), また成層流体に対しては、

1.5 層準地衡流渦度方程式から KdV 方程式を導出する。方程式は

$$\frac{\partial q}{\partial t} + U \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial x} Q_y + J(\psi, q) = 0 \quad (3.13)$$

ここで、

$$q = \nabla_H^2 \psi - F\psi, \quad Q_y = \beta - \frac{d^2 U}{dy^2} + FU \quad (3.14)$$

であり、 $U(y)$ が背景流、 $\psi(x, y, t)$ が擾乱成分である。 β チャネルを考え、南北の境界条件を

$$\psi(y_S) = \psi(y_N) = 0$$

とする。

擾乱の振幅を ε 、擾乱の東西スケールを $\varepsilon^{-1/2}$ とし、長波速度 c_0 で移動する座標系で考える。また、この時、この移動座標系で時間変動と非線形項が釣り合うとすると、この座標系での変動の時間スケールは $\varepsilon^{-3/2}$ となる。すなわち、擾乱は ε で展開し、

$$\psi = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \psi^{(n)}, \quad \xi = \varepsilon^{1/2}(x - c_0 t), \quad \tau = \varepsilon^{3/2} t$$

最低次での方程式は、

$$(U - c_0) \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{\partial^2 \psi^{(1)}}{\partial y^2} - F \psi^{(1)} \right] + \frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial \xi} Q_y = 0 \quad (3.15)$$

$\psi^{(1)} = A(\xi, \tau) B(y)$ とすると、

$$\frac{d^2 B}{dy^2} - FB + \frac{Q_y}{U - c_0} B = 0 \quad (3.16)$$

境界条件は $B(y_S) = B(y_N) = 0$ 。 c_0 はこの方程式の固有値であり、中立波を考えているので実数である。至るところ $c_0 \neq U$ の場合は何の問題もないが、 $c_0 - U(y_c) = 0$ となる点 (臨界緯度) が存在し、かつ、 $Q_y(y_c) \neq 0$ の場合には特異性が現れ、臨界層内を解いて外部と繋ぐなどという操作が必要になりいろいろ面倒である (Redekopp 1977)。 $Q_y(y_c) = 0$ で $Q_y(y_c)/(U(y_c) - c_0)$ が有限な場合には non-singular neutral mode (非特異中立モード) となるが、この場合でも、見掛け上、高次の方程式には特異性が現れる。 $Q_y(y_c) = 0$ というのは、 $c_0 - U(y_c) = 0$ となる点の近傍では渦位が一様化している状況である。渦位は

$$Q + \varepsilon \left[\frac{\partial^2 \psi^{(1)}}{\partial y^2} - F \psi^{(1)} \right] + \varepsilon^2 \left[\frac{\partial^2 \psi^{(1)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi^{(2)}}{\partial y^2} - F \psi^{(2)} \right] + \dots$$

であるが、これらの空間微分が ε の各次数毎にゼロになるように選ぶことが可能となる。したがって、それぞれの次数毎には特異性はなく、各次数に現れる特異性は除去可能となり、至るところ $c_0 \neq U$ の場合とほぼ同様に扱うことが出来る。ここでは面倒なので、至るところ $c_0 \neq U$ の場合と同じだと思って扱う。

ε の次の次数では、

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left[\psi_{yy}^{(2)} - F \psi^{(2)} \right] + \frac{Q_y}{U - c_0} \frac{\partial \psi^{(2)}}{\partial \xi} = - \frac{B_{yy} - FB}{U - c_0} \frac{\partial A}{\partial \tau} - \frac{BB_{yyy} - B_y B_{yy}}{U - c_0} A \frac{\partial A}{\partial \xi} - B \frac{\partial^3 A}{\partial \xi^3} \quad (3.17)$$

となる。この式の両辺に B を掛けて、 y_S から y_N まで積分する。左辺は

$$\left[B \psi_{\xi y}^{(2)} - \psi_{\xi}^{(2)} B_y \right]_{y_S}^{y_N} + \int_{y_S}^{y_N} \psi_{\xi}^{(2)} \left[B_{yy} - FB + \frac{Q_y}{U - c_0} B \right] dy$$

となる。最初の括弧は境界条件よりゼロ。次の積分の中には (3.16) があり、 $\psi_{\xi}^{(2)}$ が有限であるならば、ゼロになる。 $(\psi^{(2)})$ が有限というのが、 ε 展開が成立する条件なので、これを可解条件という。したがって、(3.17) の両辺に B を掛けて積分した式より、

$$\frac{\partial A}{\partial \tau} + \alpha A \frac{\partial A}{\partial \xi} + \gamma \frac{\partial^3 A}{\partial \xi^3} = 0 \quad (3.18)$$

を得る。ここで、

$$\alpha = \int_{y_S}^{y_N} \frac{(B^2 B_{yyy} - BB_y B_{yy})}{U - c_0} dy / \int_{y_S}^{y_N} \frac{(BB_{yy} - FB^2)}{U - c_0} dy,$$

$$\gamma = \int_{y_S}^{y_N} B^2 dy / \int_{y_S}^{y_N} \frac{(BB_{yy} - FB^2)}{U - c_0} dy$$

[簡単な例]

最も簡単な例として、区分的に Q が一様な場合を考える。さらに $F = 0$ とする。水路幅を y_N とし、領域を $0 < y < y_N$ 、 $y = L$ で渦位が不連続に変るとして、

$$Q(y) = \begin{cases} \beta y_N & \text{for } L < y < y_N \\ 0 & \text{for } 0 < y < L \end{cases}$$

とする。この時、 $U(y)$ は

$$U(y) = U_0 + \begin{cases} \frac{1}{2}\beta[(y - y_N)^2 - (L - y_N)^2] & \text{for } L < y < y_N \\ \frac{1}{2}\beta[y^2 - L^2] & \text{for } 0 < y < L \end{cases}$$

である。 $y = L$ で流速最大。 $(U_0 > 0$ とするとき) 北側では低気圧性シア、南では高気圧性シア。 $B(y)$ は $y = L$ での連続性を用いて、

$$B(y) = \begin{cases} B_0(y - y_N)/(L - y_N) & \text{for } L < y < y_N \\ B_0 y/L & \text{for } 0 < y < L \end{cases}$$

となる。(3.16) より、接続条件は $y = L$ の近傍で積分して、

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{dB}{dy} \Big|_{L-\delta}^{L+\delta} = -\frac{B(L)}{U_0 - c_0} (Q(y > L) - Q(y < L)) = -\frac{B(L)}{U_0 - c_0} \beta y_N$$

したがって、

$$c_0 = U_0 - \beta(y_N - L)$$

係数 α は $B^2 B_{yyy} - BB_y B_{yy} = (B^2 B_{yy})_y - \frac{3}{2} B(B_y^2)_y$ なので、

$$\alpha = \frac{3}{2} B_0 \frac{2L - y_N}{(y_N - L)L}, \quad \gamma = -\frac{\beta}{3} (y_N - L)^2 L^2$$

$L = y_N/2$ では非線形性はなくなる。これは南北対象だからである。非線形性による波の速度への影響は、 $L > y_N/2$ の時は負の波の、 $L < y_N/2$ の時は正の波の西向き伝播が速くなるという形である。これは、線形波の西向き伝播速度が $\gamma < 0$ なので、分散性は西向き伝播速度を遅くする。ソリトン解は

$$A(\xi, \tau) = \phi_0 + a \operatorname{sech}^2 \left((\alpha a / 12 \gamma)^{1/2} (\xi - c_1 \tau) \right)$$

$$c_1 = \alpha \phi_0 + \frac{\alpha a}{3 \gamma}$$

である。 $\alpha a/12\gamma > 0$ でなければいけないので、 $L > y_N/2$ の時には、 $a < 0$ 、すなわち、北側の低気圧部分の振幅が増大する。

なお、この問題では渦位が不連続に分布している。それ故波動は渦位の不連続線 (渦位フロント) の変位としても表現できる。渦位フロントの南北変位を η とすれば、

$$q(\xi, y, \tau) = \begin{cases} \beta y_N & \text{for } L + \eta(\xi, \tau) < y < y_N \\ 0 & \text{for } 0 < y < L + \eta(\xi, \tau) \end{cases}$$

である。この時、 η が小さいとすると

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} \psi^{(1)} = -\beta y_N \eta \delta(y - L)$$

(ここで、 $\delta(*)$ はデルタ関数) なので、

$$\psi^{(1)} = \begin{cases} \beta(y_N - y)L\eta & \text{for } L < y < y_N \\ \beta(y_N - L)y\eta & \text{for } 0 < y < L \end{cases}$$

となる。したがって、

$$A(\xi, \tau) = \frac{\beta(y_N - L)L}{B_0} \eta(\xi, \tau)$$

という関係が得られる。

3.5 傾圧不安定な場でのソリトン

孤立波は、一度出来るとそのまま存在する。その発生については何も語らない。また、上述のシア・ロスビーソリトンは、流れの中に存在する。もし流れが不安定、もしくは潜在的に不安定な場合は何が起きるのか。また、日本南岸の黒潮大蛇行は小蛇行の成長により生じるが、そのような孤立した成長擾乱は不安定な系での孤立波として扱えるのではないか。そのような発想の元、Kubokawa (1988, 1989) は傾圧不安定な場での弱非線形長波を議論した。

用いる方程式は2層準地衡流渦度方程式。 $y = 0$ に境界 (岸) があり、 $y < 0$ は流体に満たされているとする。上層の $y = 0$ に沿う東向きの流れ $\bar{u}(y)$ を与え、上層の渦位の南北傾度 q_{1y} は正、下層では負 ($q_{2y} < 0$) になるようにする。これにより、流れは傾圧不安定になりうる。この不安定が上で考えたような弱非線形と釣り合うためには弱不安定でなければいけない。弱不安定を作る方法は他にもあるが、ここでは、上層の厚さに比べて下層が厚い場合を考える。その比を $\delta \ll 1$ とする。この場合、上層の流線関数を ψ_1 とすると下層の流線関数の大きさは $\delta\psi$ 程度になる。これは、下層の運動は上層の運動に伴う密度界面の変位により生じるのだが、層厚に対する密度界面の変位の比が下層では (層厚が大き

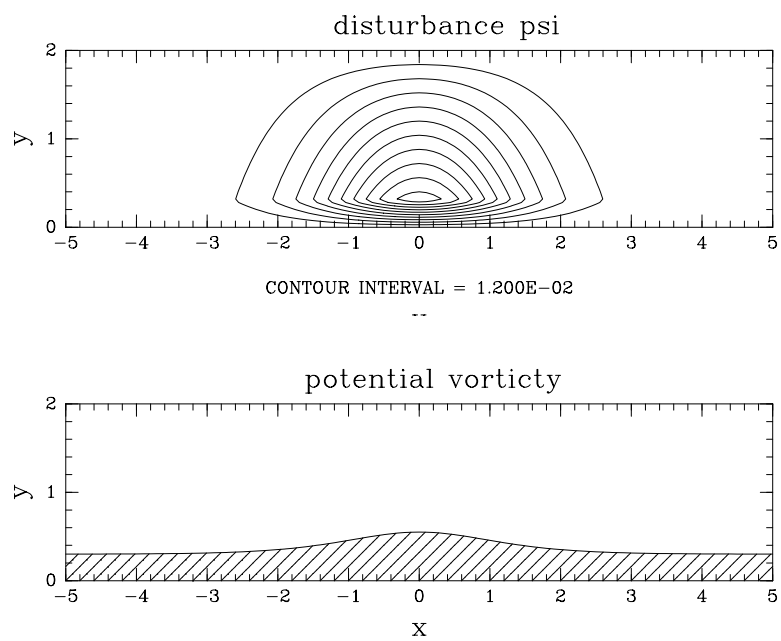


Figure 3.4: ロスビーソリトンの計算例。上図は擾乱の流線。下図は渦位フロントの分布 (斜線部分の渦位がゼロ)。 $\beta = 1, y_N = 2, L = 0.3, B_0 = 1.0, \eta_{max} = 0.25$ として計算

いため) 上層に比べて δ 程度となるからである。また、下層での南北渦位傾度が負であるために、 β も \bar{u}_y に比べて、 δ 程度とする。

無次元の方程式は、

$$\frac{\partial q_1}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial q_1}{\partial x} + \frac{\partial \psi_1}{\partial x} Q_{1y} + J(\psi_1, q_1) = 0 \quad (3.19)$$

$$\frac{\partial q_2}{\partial t} + \frac{\partial \psi_2}{\partial x} Q_{2y} + J(\psi_2, q_2) = 0 \quad (3.20)$$

ここで、

$$q_1 = \nabla_H^2 \psi_1 - (\psi_1 - \delta \psi_2) \quad (3.21)$$

$$Q_{1y} = -\frac{d^2 \bar{u}}{dy^2} + \bar{u} + \delta \beta \quad (3.22)$$

$$q_2 = \delta \nabla_H^2 \psi_1 + \delta (\psi_1 - \delta \psi_2) \quad (3.23)$$

$$Q_{2y} = -\delta \bar{u} + \delta \beta \quad (3.24)$$

$$(3.25)$$

である。この式では、空間スケールを $\sqrt{\Delta \rho g H_1 / \rho_0} / f_0$ に取っているので、上層の伸縮項の係数は 1、下層のそれは δ になっている。

空間と時間を $\xi = \delta^{1/2} x, \tau = \delta^{3/2} t, \bar{u}(y) = \bar{u}_0(y) + \delta \bar{u}_1$ として、 ψ を δ で展開する。そうすると、

$$\frac{\partial \phi}{\partial \tau} + (c_0 + \alpha \phi) \frac{\partial \phi}{\partial \xi} - \mu \frac{\partial^3 \phi}{\partial \xi^3} - s \int_{-\infty}^0 \bar{u}_0 \frac{\partial \psi_2}{\partial \xi} = 0 \quad (3.26)$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{\partial^2 \psi_2}{\partial y^2} + \bar{u}_0 \phi \right] - (\bar{u}_0 - \beta) \frac{\partial \psi_2}{\partial \xi} = 0 \quad (3.27)$$

という形の連立方程式を得る。ここで $\phi(\xi, \tau)$ は上層擾乱の振幅を表す関数で、上層の擾乱の流線関数は $\bar{u}_0(y) \phi(\xi, \tau)$ である。(3.26) は KdV 方程式に、下層の影響を表す項が付いたものである。下層の方程式 (3.27) は、上層の平均流による層厚変化と β による渦位分布を復元力とする長波の方程式である。時間変動項 (下層の擾乱の渦位) の中に上層の流線があり、この項を通じて、上層の影響を受ける。下層の渦位傾度は岸近くでは負なので、下層に捕捉された波は ξ の正の方向に伝播する。

[線形波]

上層に捕捉された波は東向きの流れの中で、流れに相対的に西に進む。他方、下層の波は東に進む。両者の位相速度が一致したところで傾圧不安定が生じる。

線形化し ($\alpha = 0$ と置き)、

$$\phi = \phi_0 e^{i(k\xi - c\tau)}, \quad \psi_2 = \phi_0 A(y) e^{i(k\xi - c\tau)} \quad (3.28)$$

を代入すると

$$-c + c_0 + \mu k^2 - s \int_{-\infty}^0 \bar{u}_0 A dy \quad (3.29)$$

$$-c \left(\frac{\partial^2 A}{\partial y^2} + \bar{u}_0 \right) - (\bar{u}_0 - \beta) A = 0 \quad (3.30)$$

という連立方程式になる。通常、分散関係は横軸に波数を取るが、ここでは、

$$\gamma = c_0 + \mu k^2 \quad (3.31)$$

を横軸に取る。その時の分散関係図の例を Fig.3.5 に示す。

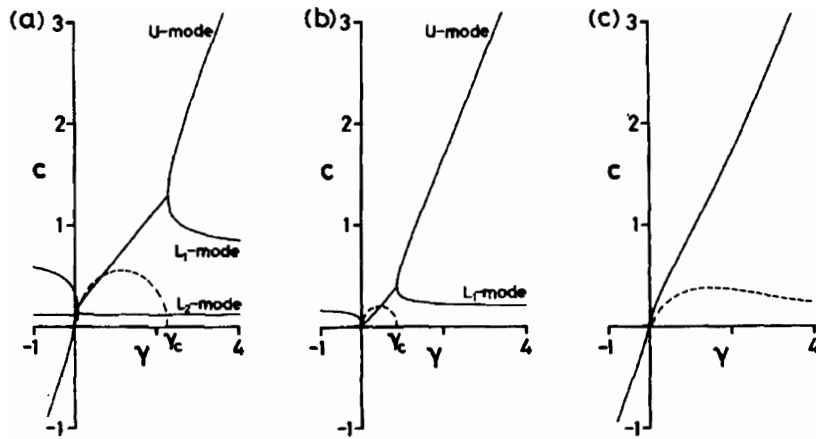


Figure 3.5: 不安定な境界流上の擾乱の分散関係。実線は位相速度の実数部分、破線は虚数部分。(a) $\beta = 0$, (b) $\beta = 0.1$ (東向きの流れ), (c) $\beta = -0.1$ (西向きの流れ)。横軸 γ は線形波に関しては $\gamma = c_0 + \mu k^2$, ソリトン解に対しては、 $\gamma = c_0 - \alpha a/3$ (Kubokawa, 1989 より)

$\beta = 0$ もしくは正の場合、 γ が $0 < \gamma < \gamma_c$ で不安定となる。 $c_0 > \gamma_c$ の時には、常に $\gamma > \gamma_c$ なので、流れは線形安定となる。

c_0 は下層との相互作用を考えない場合の長波 ($k = 0$ の時の) の位相速度である。この長波速度 c_0 は平均流の岸での流速に依存する。岸での流速が正であれば正になる。したがって、岸での流速がある臨界値より大きければ流れは線形安定である。

[孤立波解]

流れが安定な場合 ($c_0 > \gamma_c$) を考えよう。速度 c が実数であると仮定すると、孤立波解は

$$\phi = -a \operatorname{sech}^2[(\alpha a/12\mu)^{1/2}(\xi - c\tau)], \quad \psi_2 = \phi A(y) \quad (3.32)$$

となる。この場合、振幅と γ の関係は

$$\gamma = c_0 - \frac{\alpha}{3}a \quad (3.33)$$

である。振幅 a が大きくなると、西向き速度が大きくなるので、 γ が小さくなることが分かる。したがって、流れが線形安定であったとしても、振幅が

$$a_c = \frac{3}{\alpha}(c_0 - \gamma_c) < a < a'_c = \frac{3}{\alpha}$$

であれば、(3.32) の形の孤立波解は存在しないということである。この場合については、 $\gamma = \gamma_c$ の周りで摂動展開することにより、成長する孤立擾乱の解析解を導くことができる (Kubokawa, 1989) が、ここでは、数値的に計算した結果を見てみよう。

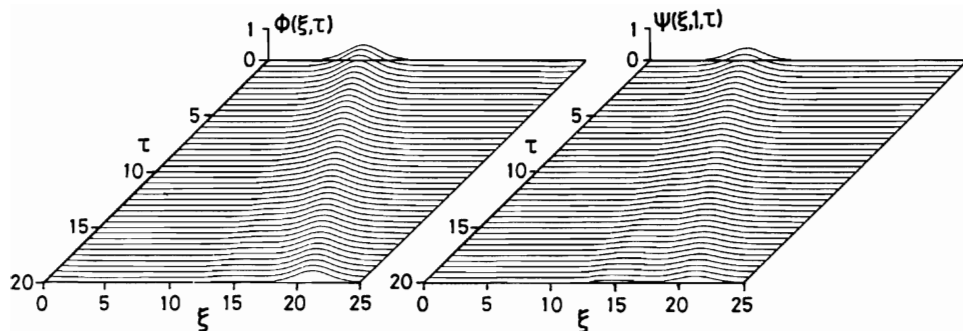


Figure 3.6: 線形安定な場合の孤立した初期擾乱の発展 ($\beta = 0$)。左が上層、右が下層。初期振幅は $a < a_{c_0}$ 。下層の構造は $\gamma = \gamma_c$ のものを用いている。なお、(3.32) の解は $\phi < 0$ であるが、ここでは、正として描いている (Kubokawa, 1988 より)

$a < a_c$ であれば、上層捕捉と下層捕捉の2つのソリトンに分かれる (Fig.3.6)。他方、 $a > a_c$ であれば、初期擾乱は孤立したまま成長し、 $a = a'_c$ に到達すると、上層擾乱は下層擾乱から離れてソリトンとして西に伝播する。他方、下層擾乱は上層と結合し、新たに孤立擾乱を作り、成長する。これも、 $a = a'_c$ に達するとソリトンとして西に伝播する。すなわち、ソリトン列を作ることになる (Fig.3.7)。

$\beta \neq 0$ の場合には、西向きの擾乱はロスビー波を放射することになる。したがって、大振幅の孤立擾乱はロスビー波を放射しつつ減衰することになる (Fig.3.8, Fig. 3.9)。

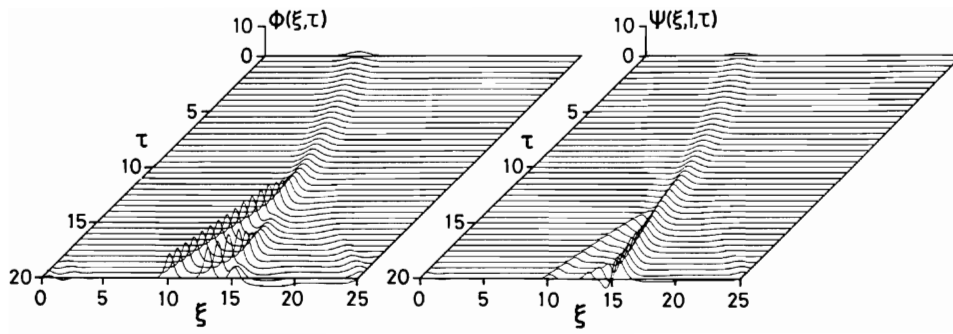


Figure 3.7: Fig.3.6 に同じ。ただし、初期振幅 a は $a_c < a < a'_c$ 。 (Kubokawa, 1988 より)

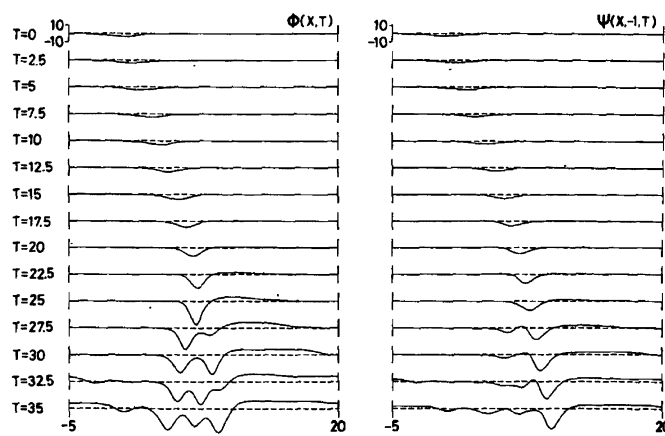


Figure 3.8: 線形安定な場合の孤立した初期擾乱の発展 ($\beta \neq 0$)。左が上層、右が下層。初期振幅は $a > a_{c0}$ 。ている (Kubokawa, 1989 より)

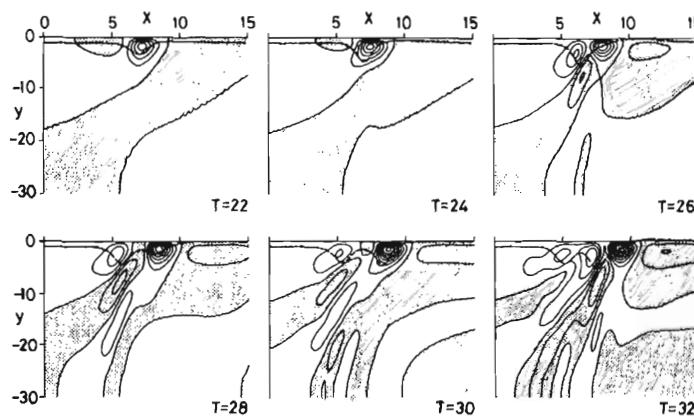


Figure 3.9: Fig.3.8 における下層流線。擾乱が西に進み始めるとロスビー波が放射されているのが分かる。に同じ。 (Kubokawa, 1989 より)

Kubokawa (1989) は黒潮小蛇行から大蛇行への移行のモデルとして、この解を提出した。大振幅孤立波になった後は、西に進みつつ減衰するが、定常大蛇行のようなものは作れない。これは、おそらく弱非線形論の限界なのだろうと思われる。

Chapter 4

孤立擾乱の厳密解：モドン

4.1 波と渦：ソリトンとモドン

前節では、地球流体中の孤立擾乱のモデルとしてのロスビーソリトンを見てみた。ロスビーソリトンもその適用先はGRSや海洋冷水リングのような渦が中心であった。しかし、ソリトンは基本的には波である。波と渦の違いは何処にあるのかというと、擾乱とともに移動する座標系で見たときに流線が閉じているかどうかである。流線が開いていれば、その孤立擾乱を構成する流体は次々に入れ替わる。その場合、渦位と流線の関数関係は至るところ同じでなければいけない。他方閉じていれば、入れ替わることはない。その場合には、閉じた流線内部の渦位-流線関係と外部の渦位-流線関係が同じである必要はない。内部と外部の渦位-流線関係が同じ場合、平均流に南北シアを考えるとかする必要がある。しかし、閉じた流線の内部の渦位-流線関係を外部とは別に選べるとすれば、平均流がないような状況でも孤立した擾乱は存在可能になる。

モドンは、 β 平面上の渦対の解である。モドンという名称は、1970年代始めに行われた海洋観測実験、MODE (Mid-Ocean Dynamics Experiment) に由来する。その観測実験以前は、西岸境界域を離れた海洋の深層は流れのない静かな世界だと思われていた。しかしこの観測により海洋は多数の渦で占められていることが明らかになった。そのような渦一杯の世界の概念モデルとして Stern が 1975 年に発表したのがこのモドン解である。Stern (1975) のモドンは静止した渦であったが、その後、Flierl, Larichev, McWilliams and Reznik (1980) 等により、東向きや西向きの解、また同心円状の渦を伴うライダー解など、いろいろ調べられた。

モドンは β 平面準地衡流渦度方程式の厳密解である。 β 平面準地衡流渦度方程式の厳密解というのは、東西流とか、三角関数型の波動解とか、実はごく限られている。その意味において貴重な厳密解と言える。また、極側に高気圧、赤道側に低気圧という構造は大気ブロッキングによくみられる構造で、そのモデルとして調べられ、さらには、後述する

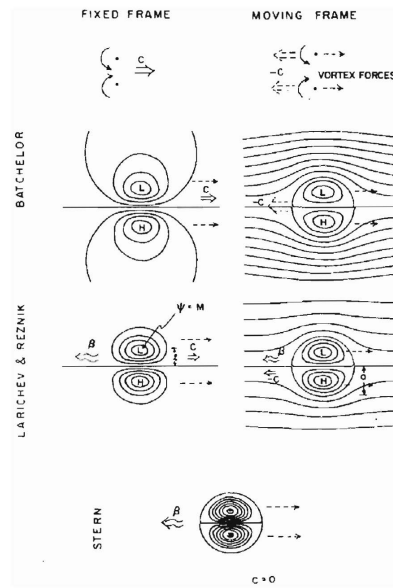


Figure 4.1: 渦対の解。β 効果のない2次元流体での Batchelor の渦対、Larichev and Reznik (1976) の西向き伝播の渦対、Stern (1975) による静止した渦対。Flierl, Larichev, McWilliams and Reznik (1980) による。

ように、適当な初期値から出発するとき、モドン、もしくは、それに類似した構造はしばしば現れる。

4.2 モドン解

モドンは多層や連続成層でも存在するが、ここでは、簡単のため1.5層モデルで考える。速度 c で移動する擾乱に関する方程式は

$$\nabla_H^2 \psi - F\psi + \beta y = G(\psi + cy) \quad (4.1)$$

である。この移動擾乱が(移動している座標系で見たとき)半径 a の閉じた円形の $\psi + cy = \text{一定}$: 等渦位線)を持っているとする。その外側では、 $x \rightarrow -\infty$ で流体は静止、すなわち、 $\psi \rightarrow 0$ 。 G の関数形は、 $\beta y = G(cy)$ より、 $G(\psi) = (\beta/c)\psi$ となる。(4.1) は

$$\nabla_H^2 \psi - \left(F + \frac{\beta}{c}\right) \psi = 0 \quad (4.2)$$

平面極座標で書くと

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right] + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} - \left(F + \frac{\beta}{c}\right) \psi = 0 \quad (4.3)$$

$s^2 = (F + \beta/c)$ が負であれば、解は J_n になる。これは、波動的であり、無限遠点まで続き、エネルギーは無有限大となる。すなわち、コンパクトであるためには、 $s^2 \geq 0$

$$c < -\frac{\beta}{F} \quad \text{or} \quad c > 0$$

でなければいけないということである。このことは、ロスビー波が存在しない速度領域と
言うことで、ロスビー波が存在する領域では、必ずロスビー波が励起され、エネルギーが
ロスビー波により失われるため定常進行解は存在しえないということの意味する

外部での一般解は

$$\psi = \sum_{n=0}^{\infty} K_n(sr) \{A_n \sin n\theta + B_n \cos \theta\} \quad (4.4)$$

となる。ここで、 K_n は第 2 種変形ベッセル関数である。

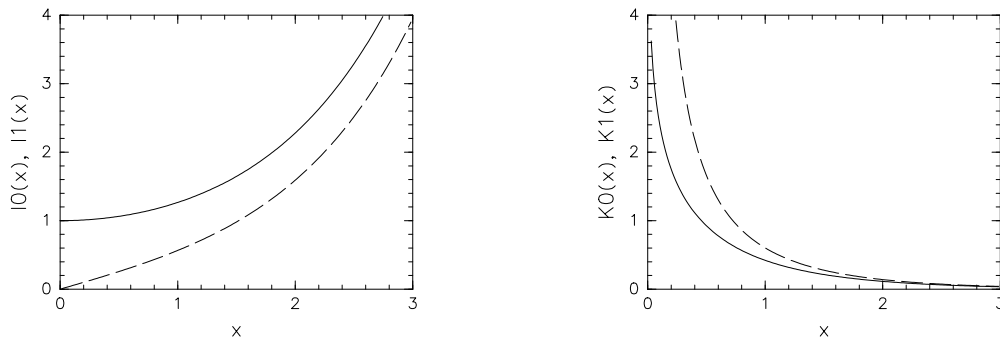


Figure 4.2: ベッセル関数。 $I_0(x), I_1(x), K_0(x), K_1(x)$. (次数がゼロが実線、1が破線)

閉じた流線 (等渦位線) の内側での渦位-流線関係 ($G(\psi + cy)$) は自然には決まらない。
そこで、なるべく簡単な形ということで、

$$G(\psi + cy) = -\gamma(\psi + cy) \quad (4.5)$$

と置く。これは、正の渦位は低気圧、したがって、 $\psi < 0$ という対応を考えている。方程式は、

$$\nabla_H^2 \psi + (\gamma - F)\psi + (\beta + \gamma c)y = 0 \quad (4.6)$$

$\hat{\psi} = \psi + (\beta + \gamma c)y/(\gamma - F)$ を導入すると、 $\nabla_H^2 \hat{\psi} = \nabla_H^2 \psi$ なので、

$$\nabla_H^2 \hat{\psi} + (\gamma - F)\hat{\psi} = 0 \quad (4.7)$$

である。これを平面極座標で書くと

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial r} \right] + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \hat{\psi}}{\partial \theta^2} + (\gamma - F) \hat{\psi} = 0 \quad (4.8)$$

となる。さらに $\hat{\psi}(r, \theta) = \sum_n \phi_n(r) e^{in\theta}$ の形の解を考えると、

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[r \frac{d\phi_n}{dr} \right] - \left[\frac{n^2}{r^2} - (\gamma - F) \right] \phi_n = 0 \quad (4.9)$$

となる。 $r = 0$ で有限な解は、 J_n か I_n である。ここで、 I_n は第 1 種の変形ベッセル関数。 $r = a$ で内部解と外部解は 1 階微分まで連続でなければいけない。それを満足するのは、 J_n のみである。したがって、 $k^2 = \gamma - F > 0$ で、解は

$$\psi = \sum_n J_n(kr) \{C_n \sin n\theta + D_n \cos \theta\} - \frac{\beta + (k^2 + F)c}{k^2} r \sin \theta \quad (4.10)$$

となる。 $\sin n\theta, \cos n\theta$ の項が現れ、それぞれが、1 階微分まで連続という条件の下で、外部解 (4.4) と繋がる必要がある。しかし、非同次項をもつ $\sin \theta$ 以外の項の振幅は外部解との接続ができず一般にはゼロになる。すなわち、 $C_n = 0$ for $n \neq 1$, $D_n = 0$ であり、南北反対称の $\sin \theta$ の項だけを考えれば良い。

内部解が $\sin \theta$ に比例するので、外部解は、

$$\psi = A_1 K_1(sr) \sin \theta$$

連続性より、

$$C_1 J_1(ka) - \frac{\beta + (k^2 + F)c}{k^2} a = A_1 K_1(sa) = -ca. \quad (4.11)$$

ここで、 $r = a$ で $\psi + cy = \text{一定} = 0$ を用いた。この式より、 $\beta + Fc = s^2 c$ であることに注意すると、

$$C_1 = \frac{s^2}{k^2} \frac{ca}{J_1(ka)}, \quad A_1 = -\frac{ca}{K_1(sa)}. \quad (4.12)$$

さらに、微分の連続より、

$$C_1 \left. \frac{dJ_1}{dr} \right|_{r=a} - \frac{\beta + (k^2 + F)c}{k^2} = A_1 \left. \frac{dK_1}{dr} \right|_{r=a}.$$

これに回帰公式

$$xJ'_n(x) = nJ_n(x) - xJ_{n+1}(x), \quad xK'_n(x) = nK_n(x) - xK_{n+1}(x)$$

を用いると

$$C_1 ka J_2(ka) = A_1 sa K_2(sa)$$

を得る。そして、(4.12) を代入すれば、

$$\frac{1}{k} \frac{J_2(ka)}{J_1(ka)} = -\frac{1}{s} \frac{K_2(sa)}{K_1(sa)} \quad (4.13)$$

を得る。

(4.13) は、 a が与えられているときの $k = \sqrt{\gamma - F}$ と $s = \sqrt{F + \beta/c}$ の関係を決めるものである。外部条件である β, F は与えられている。したがって、 γ と渦の大きさ a が与えられると c が決まり、 c が決まれば、振幅 C_1, A_1 も決まることになる。

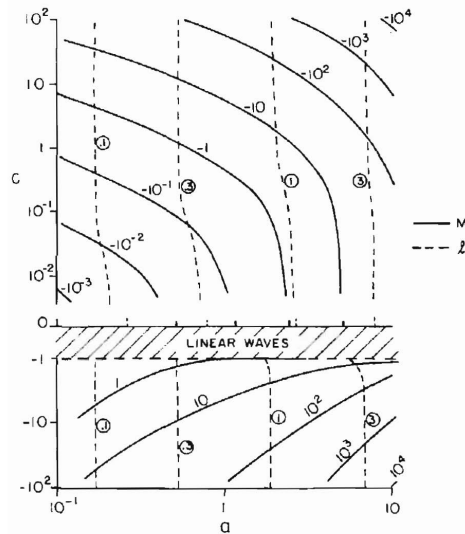


Figure 4.3: モドンの移動速度のパラメータ依存性。横軸 a は半径 (変形半径 $F^{-1/2}$ で規格化)、縦軸 c は速度 (ロスビー長波速度 β/F で規格化)。 M は最大の流線の値 ($\beta F^{-3/2}$ で規格化)、 l は渦の中心間の距離の半分 ($F^{-1/2}$ で規格化)。Flierl, Larichev, McWilliams and Reznik (1980) による。

$c = 0$ の解が最初に Stern が導出したモドンである。この解では、北に反時計回りの渦が、南に時計回りの渦がある。したがって、渦対としては東に加速しようとする。それと、ロスビー波の西向き傾向が釣り合って止っていると見ることができる。渦対が東に動くためには、その南北に西向きの流れを作る必要がある (西向きの流れにより渦が動くスペースを東側に作る)。渦が止っていられることから明らかのように、この場合、 $r > a$ には流れがない ($A_1 = 0$)。また、内部解の振幅、 C_1 は $C_1 = \frac{\beta}{k^2 J_1(ka)} a$ 。 β 平面上で、このような静止した渦対が存在可能なのは、流れが北 (南) 側の低 (高) 気圧性循環で北 (南) に行くと相対渦度が負 (正) に転じ、渦の縁 ($r = a$) での流速がゼロになることにより、外部に影響しないからである。これよりも振幅が小さくなると、南北移動により逆向きの流れができ、渦対構造はロスビー波として、西に進みながら壊れていく。

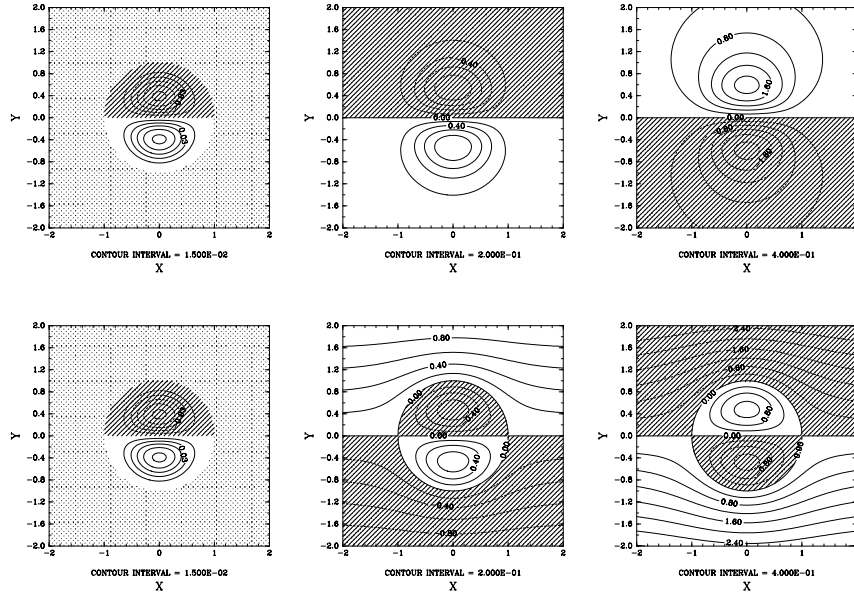


Figure 4.4: モドン解。左: 静止した解 ($c/(\beta/F) = 0.0$), 中央: 東に進む解 ($c/(\beta/F) = 0.5$), 右: 西に進む解 ($c/(\beta/F) = -1.5$). 上段は静止系での流線。下段は c で動く系での流線。全て、 $a = F^{-1/2}$

4.3 ライダー

モドン解は南北反対称の渦対の解であるが、その上に中心対称な構造を載せることもできる。それをライダーという。内部の渦位を (4.5) の代りに

$$G(\psi + cy) = Q - \gamma(\psi + cy) \quad (4.14)$$

と置こう。ここで、 Q は定数である。この時、解を $\hat{\psi} = \psi + \{(\beta + \gamma c)y - Q\}/(\gamma - F)$ と置けば、 $\hat{\psi}$ は $Q = 0$ の場合と同じ。内部の解は、

$$\psi = C_0 J_0(kr) + C_1 J_1(kr) \sin \theta + \frac{Q}{k^2} - \frac{\beta + (k^2 + F)c}{k^2} r \sin \theta \quad (4.15)$$

となり、外部の解は、

$$\psi = A_0 K_0(sr) + A_1 J_1(sr) \sin \theta \quad (4.16)$$

となる。

接続条件より、 $\sin \theta$ の項はまるっきり同じになる。したがって、渦の移動速度などは $\sin \theta$ の項 (γ, a) で決まる。中心対称解の連続性は、

$$C_0 J_0(ka) + \frac{Q}{k^2} = A_0 K_0(sa), \quad C_0 \left. \frac{dJ_0}{dr} \right|_{r=a} = A_0 \left. \frac{dK_0}{dr} \right|_{r=a}$$

後者に回帰公式

$$xJ_0'(x) = -xJ_1(x), \quad xK_0'(x) = -xK_1(x)$$

を用いると

$$C_0kaJ_1(ka) = A_0saK_1(sa)$$

を得る。したがって、

$$C_0 = \frac{Q}{k^2} \frac{sK_1(sa)}{kJ_1(ka)K_0(sa) - sK_1(sa)J_0(ka)}, !$$

$$A_0 = \frac{Q}{k^2} \frac{kJ_1(ka)}{kJ_1(ka)K_0(sa) - sK_1(ka)J_0(ka)}$$

となる。一様渦位 Q に比例する同心円状の渦が渦対に重なった形である。なお、Fig.4.5 にも見られるように、 $Q > 0$ のときに、 C_0 は正、すなわち、同心円状の解の圧力は中心で高くなる。これは、正の渦位が高気圧を作っているようで奇妙に思われるかも知れない。ここで注意すべきは、 Q を与えることは、渦位を与えると言うよりも $r = a$ に渦位のギャップ (渦位フロント) を与えるということである。渦の内部 ($r < a$ の領域) では渦位と流線の関係は波動型 (渦位と流線が逆符合：外部は指数関数型) である。したがって、渦位フロントでの急激な変化が振動を引き起こし、逆の渦位を中心部に作る。つまり、ライダーは渦位 Q の渦ではなく、 Q の変位を持つ渦位フロントに対する応答として現れる渦と理解すべき渦である。

β 平面上で孤立した渦が永続的に存在するためには、その伝播速度がロスビー波の存在可能な速度の外でなければいけない。それを引き起こせるのは、渦対の構造であり、西向きに加速する北に高気圧、南に低気圧の渦対、もしくは、東向き速度を与える北に低気圧、南に高気圧の渦対、である。そして一度そのような構造を持てば、その構造に乗った形の同心円状の渦も可能となる。なお、「存在するためには、こうでならない」という言い方をすると、「存在するためにはこうであらねばならないが、実際には存在しない」のではないかと思うかも知れない。そんなことはないので、そのことを次に見てみよう。

4.4 モドン、もしくは、モドンのような構造の出現

2層モデルで初期値として傾圧渦 (上層と下層の回転が逆で鉛直積分すると流量はゼロ) を与えた場合何が起きるか。この渦は何と (一時期ではあるが) 東に移動する。何故か。上層が低気圧 (正の渦位)、下層が高気圧性 (負の渦位) であるとしよう。その場合、渦による惑星渦度 βy の移流により、上層 (下層) では西側に低 (高) 気圧、東側に (低) 高気圧性

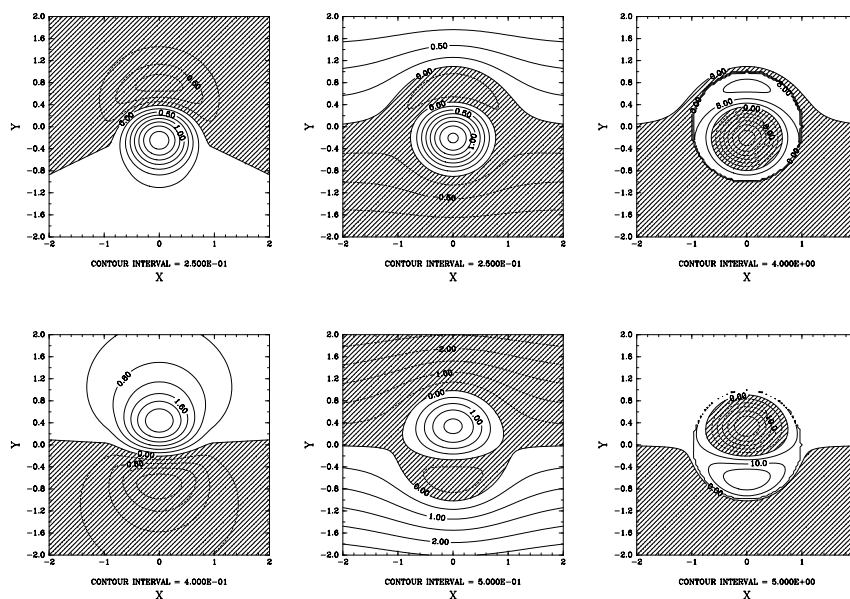


Figure 4.5: ライダー解。左：静止系での流線、中央： c で動く移動系での流線、右：渦位。上段が東へ進む解 ($c = 0.5\beta F^{-1}$)、下段が西へ進む解 ($c = -1.5\beta F^{-1}$)。他のパラメータは $a = F^{-1/2}$, $Q = 5\beta F^{-1/2}$ 。

の循環が生じる。これは、渦の西方伝播の説明である。次にこの循環により、元の渦が上層では北に、下層では南に移流される。これは、高気圧は低緯度へ、低気圧は高緯度へ移動するという説明に用いられる。そして結果としては、順圧場には、北に低気圧、南に高気圧という東向きモード構造が現れるのである。それにより、渦は東に移動する (Fig. 4.6)。

逆符合の渦を南北においたとき、その距離がある程度近いと渦は近づき、それらは渦対を形成する。モードはモード同士の追い越しや衝突に際しても比較的安定である。このような性質は、ソリトンと比較される。実際、同符号のモードの追い越し (Figs. 4.7, 4.8) では、中心位置の位相が急に進む。これはソリトンの追い越しに似ている。また、南北の符合が逆のモードをぶつけると、北(南)では西に低気圧(高気圧)、東に高気圧(低気圧)の渦対が形成され、北(南)へ行くと高気圧が強まり(弱まり)、低気圧が弱まる(強まる)ので渦対は東に曲がり、同じ緯度に戻ってくる。そこでまたモードを形成し、何もなかったかのように東西に別ていく (Figs. 4.9, 4.10)。モードの正面衝突で渦が南北に大きく移動する現象は流れの不安定と関連しそうである。ここに示した例では相互作用に際しても、結構個性を維持している。ただし、モードは数理物理的な意味では必ずしも安定というわけではない。少なくとも西向きのモードは不安定である。ま

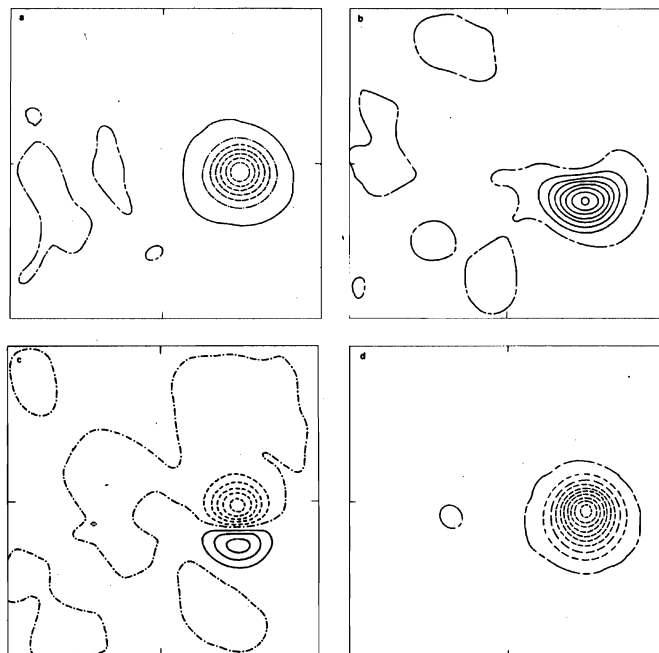
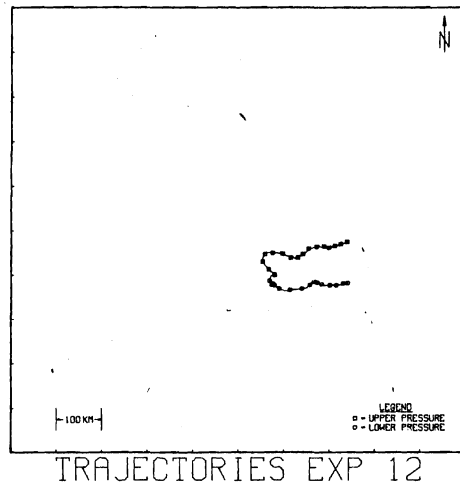


Figure 4.6: 2層プリミティブモデルによる渦の移動。初期値が純粋に傾圧な半径125km程度の渦。上の図は上層の圧力中心と下層の圧力中心の150日間の軌跡。下の4つの図は150日後の圧力：左上は上層、右上は下層、左下は順圧、右下は傾圧。Mied and Lindemann (1979) による。

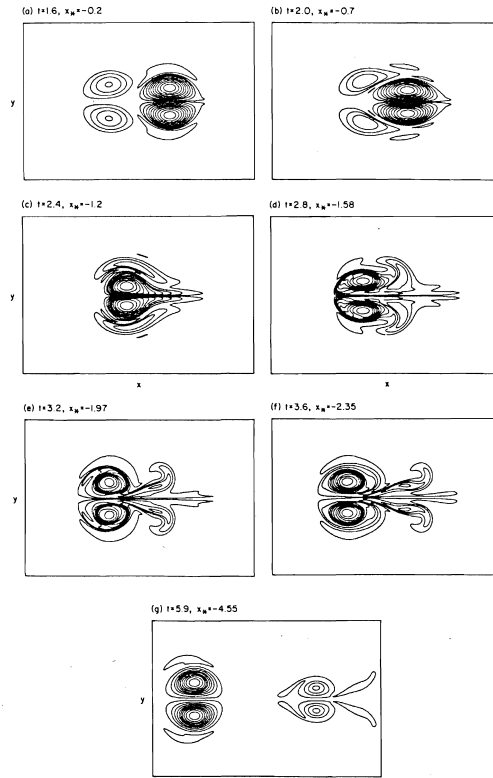


Figure 4.7: 西向きモドンの追い越し。両者の平均の速度でフレームを動かしている。McWilliams and Zabusky (1982) による。

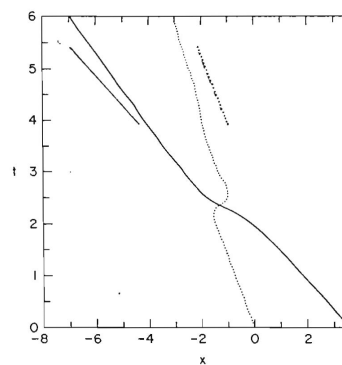


Figure 4.8: Fig. 4.7 のモドンの追い越しにおける渦度最大の位置の x 座標の時間変化。McWilliams and Zabusky (1982) による。

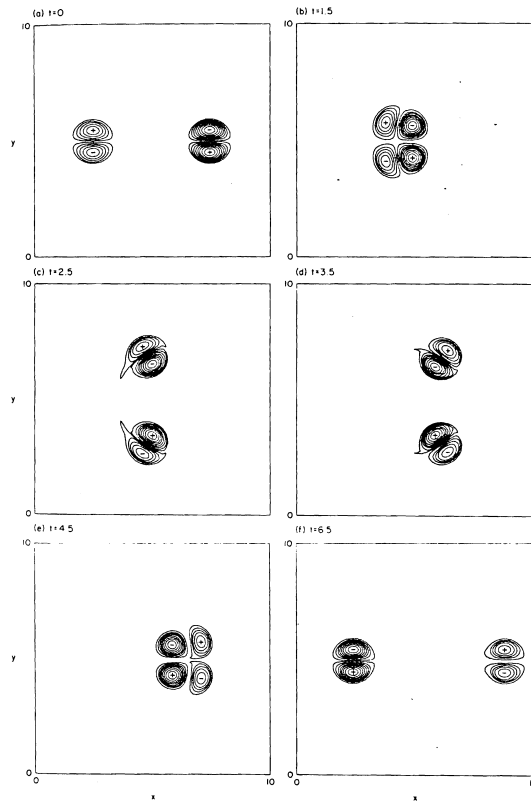


Figure 4.9: モドンの正面衝突。 McWilliams and Zabusky (1982) による.

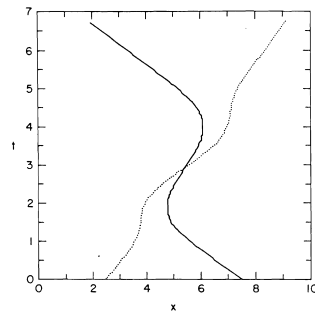


FIGURE 10 An (x,t) trajectory plot for case 7.

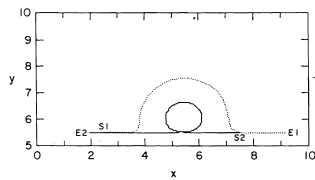


Figure 4.10: Fig. 4.9 のモドンの正面衝突における渦度最大の位置の x 座標の時間変化。下は、 $x - y$ 面での軌跡。 McWilliams and Zabusky (1982) による.

た、ライダーは壊れてしまうため、モドンが同心円状の渦を東に運び続けるということは期待できない。

もうひとつ、モドンの適用例もしくは利用例として有名なのは、大気のプロッキングである。大気プロッキングは高緯度側に高気圧、低緯度側に低気圧という構造を持ち、西風の中に停滞している。これは、砕破により低緯度側の流体が高緯度に、高緯度側の流体が低緯度に行ったものと考えられる。この構造が西向きモドンと似ていることは間違いがない。どの程度モドンと思って良いかは別として、理論研究を行う場合の初期値や背景場として有用である。

地球流体中にはモドンに代表されるような渦対構造が頻繁に見られる。 β がさほど効かないような世界では、渦の移動は大体が渦対構造による。例えば、所謂流れの不安定も、流れが元々持っている渦度が塊 (渦) となり、それが、それと逆符合の流れの領域から生じた渦と”渦対”を構成することにより生じる。このような渦と渦の相互作用による渦の移動に関しては、次節で引き続き見ていく。

Chapter 5

単極渦の移動、渦と渦の相互作用

前節まで、ソリトンやモドンについてみた。モドンは渦対であり、通常の渦のイメージとは異なる。ここでは単極渦の挙動についてみる。 β 平面上の

5.1 強非線形暖水渦

渦は渦度 (相対渦度) を持つ。相対渦度はその周囲に流れを作る。 β 平面では、その流れにより、惑星渦度が移流され、それがまた相対渦度を作る。その相対渦度が元々の渦を壊さないような構造がモドンであるが、一般には、元の渦も壊れていくので、大変複雑。そのような複雑さから逃れる方法としては、渦を周囲から切り放すというものが考えられる。それがレンズ状の強非線形渦である。重い流体の上に乗った高気圧性回転するレンズ状の軽い流体。もしくは、2層流体の密度海面に上層下層の中間の密度を持つレンズ状の高気圧性渦。このような渦はその周囲に密度前線を伴い、周りには影響しない。それ故、この渦はその個性を維持し続けることとなる。

黒潮続流やガルフストリームから切り離された高気圧性の渦は暖水コアを持ち、その周囲には強い海面密度フロントを伴う。それ故、レンズ状の渦の解は現実の海洋暖水渦をある程度表現しているものとして導入された。以下ではこのような渦をレンズ渦と呼ぶ。

5.1.1 f 平面

まず、 f 平面で考えよう。密度 $\rho_0 + \Delta\rho$ の無限に深い流体の上に乗った密度 ρ_0 の有限流体からなる渦を考える。渦は同心円状であるとして2次元極座標を導入する。

$$\frac{v_\theta^2}{r} + f v_\theta = -g' \frac{\partial h}{\partial r} \quad (5.1)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial r v_\theta}{\partial r} + f = q h \quad (5.2)$$

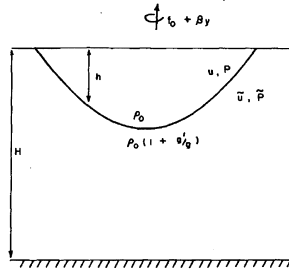


Figure 5.1: レンズ渦の模式図、2層モデル。Flierl (1984) による。

ここで、 g' は reduce gravity $= (\Delta\rho/\rho_0)g$ 。(5.1) は運動方程式の r 方向成分、(5.1) は渦位の式。ここで、 q が渦位である。 q は一般には r の関数であるが、定数と仮定する場合が多い。それは、プラントル・バチェラー理論により渦位が一様化すると考えるのは気持ちが良いし、渦位が一定なら渦内部での運動は生じない等、いろいろ気持ちが良いからである。他方、(5.1) を解く場合簡単なので、相対渦度一定(シア一定)というのも良く用いられる。ここでは、簡単のために $q = 0$ とする。この時、

$$v_\theta = -\frac{1}{2}fr, \quad h = h_0 - \frac{(fr)^2}{8g'} \quad (5.3)$$

となり、渦の半径は $h = 0$ より、

$$r_0 = 2\sqrt{2} \frac{\sqrt{g'h_0}}{f}$$

となる。ここで h_0 は渦の最大の厚さである。この渦位ゼロの渦は絶対渦度がゼロなの

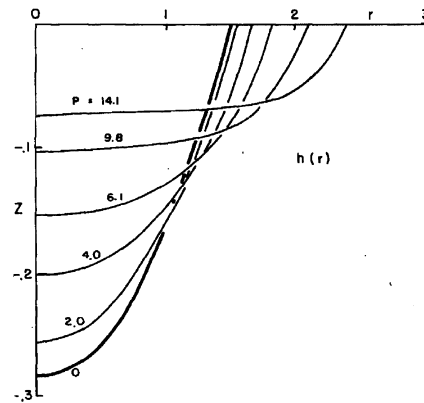


Figure 5.2: 渦位一定のレンズ渦の密度界面の深さ分布。渦位は流速、reduced gravity, およびコリオリパラメータ用いて無次元化されている。Flierl (1984) による。

で宇宙から見ると(鉛直軸周りには)回転していないことになる。相対渦度一定とした場

合、(5.1) は容易に解くことができるが、圧力傾度力が最大 (h_0 を固定したときに半径が最小) となるのが、この渦位ゼロの場合である。高気圧性の渦度が $-f$ よりも強いということは宇宙から見ても北半球では時計回りの渦があるということであり、渦の強度とともに $\partial h/\partial r$ は徐々に小さくなり、 $-2f$ で、ジオポテンシャル面上での圧力分布はなくなる。

5.1.2 β 平面

β 平面上でのレンズ渦は西向きに伝播する。そのような解は Nof (1981) によって見いだされた。その後、Killworth (1983) が理論の整備拡張を行っている。

基礎方程式は (書くまでもないが)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - (f_0 + \beta y)v = -g' \frac{\partial h}{\partial x} \quad (5.4)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + (f_0 + \beta y)u = -g' \frac{\partial h}{\partial y} \quad (5.5)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}[hu] + \frac{\partial}{\partial y}[hv] = 0 \quad (5.6)$$

である。渦は移動するので、渦の重心位置を $X(t), Y(t)$ として、 $\xi = x - X(t), \eta = y - Y(t)$ という渦とともに移動する座標系に移る。その座標系での時間を τ とすると、(5.4)-(5.6) は

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} + (u - \dot{X}) \frac{\partial u}{\partial \xi} + (v - \dot{Y}) \frac{\partial u}{\partial \eta} - (f_0 + \beta y)v = -g' \frac{\partial h}{\partial \xi} \quad (5.7)$$

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} + (u - \dot{X}) \frac{\partial v}{\partial \xi} + (v - \dot{Y}) \frac{\partial v}{\partial \eta} + (f_0 + \beta y)u = -g' \frac{\partial h}{\partial \eta} \quad (5.8)$$

$$\frac{\partial h}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial \xi}[h(u - \dot{X})] + \frac{\partial}{\partial \eta}[h(v - \dot{Y})] = 0 \quad (5.9)$$

ここで \dot{X}, \dot{Y} は X, Y の時間微分 (速度) を表す。

次に、(5.7), (5.8) に h を (5.9) に u, v をかけて足すことにより、

$$\frac{\partial}{\partial \tau} hu + \frac{\partial}{\partial \xi}[hu(u - \dot{X})] + \frac{\partial}{\partial \eta}[hu(v - \dot{Y})] - (f_0 + \beta y)hv = -\frac{g'}{2} \frac{\partial h^2}{\partial \xi} \quad (5.10)$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} hv + \frac{\partial}{\partial \xi}[hv(u - \dot{X})] + \frac{\partial}{\partial \eta}[hv(v - \dot{Y})] + (f_0 + \beta y)hu = -\frac{g'}{2} \frac{\partial h^2}{\partial \eta} \quad (5.11)$$

を得る。渦は変形しない、すなわち、 $\partial/\partial \tau = 0$ を仮定し、(5.10), (5.11) を渦の上で積分する。渦の端では $h = 0$ なので、

$$\int \int (f_0 + \beta y) h v d\xi d\eta = 0, \quad \int \int (f_0 + \beta y) h u d\xi d\eta = 0 \quad (5.12)$$

となる。他方、 $\partial/\partial\tau = 0$ なので、(5.9)より、

$$h(u - \dot{X}) = -\frac{\partial\phi}{\partial\eta}, \quad h(v - \dot{Y}) = \frac{\partial\phi}{\partial\xi}, \quad (5.13)$$

という風に流線関数が導入できる。ここで、 ϕ は渦の縁でゼロになるようにする(高気圧性の渦なので、北半球では $\phi \geq 0$ 、南半球では、 $\phi \leq 0$)。この流線関数を用いると(5.12)の第1式は

$$\begin{aligned} 0 &= \iint (f_0 + \beta y) \left(\frac{\partial\phi}{\partial\xi} + h\dot{Y} \right) d\xi d\eta \\ &= \iint \frac{\partial}{\partial\xi} \{ (f_0 + \beta y)\phi \} d\xi d\eta + \dot{Y} \iint (f_0 + \beta y)h d\xi d\eta \\ &= \dot{Y} \iint (f_0 + \beta y)h d\xi d\eta \end{aligned} \quad (5.14)$$

となり、 $\dot{Y} = 0$ であることが分かる。他方、第2式は

$$\begin{aligned} 0 &= \iint (f_0 + \beta y) \left(\frac{\partial\phi}{\partial\eta} - h\dot{X} \right) d\xi d\eta \\ &= \iint \frac{\partial}{\partial\eta} \{ (f_0 + \beta y)\phi \} d\xi d\eta - \beta \iint \phi d\xi d\eta - \dot{X} \iint (f_0 + \beta y)h d\xi d\eta \\ &= -\beta \iint \phi d\xi d\eta - \dot{X} \iint (f_0 + \beta y)h d\xi d\eta \end{aligned} \quad (5.15)$$

となる。すなわち、東西方向には($c = \dot{X}$ とおくと)、

$$c = -\beta \iint_S \phi dxdy / \iint_S (f_0 + \beta y)h d\xi d\eta \quad (5.16)$$

という速度で西に移動することが分かる。 $\beta r_0 \ll f_0$ とすると

$$\phi = -\int_{r_0}^r h v_\theta dr = \frac{1}{2} \int_{r_0}^r \left(h_0 f_0 r - \frac{f_0^3 r^3}{8g'} \right) dr = \frac{1}{4} h_0 f_0 (r^2 - r_0^2) - \frac{f_0^3}{64g'} (r^4 - r_0^4)$$

なので、

$$\int_0^{r_0} \int_0^{2\pi} \phi r d\theta dr = \frac{\pi r_0^4 h_0 f}{24}.$$

また、

$$\int_0^{r_0} \int_0^{2\pi} h r d\theta dr = \frac{\pi h_0 r_0^2}{2}$$

なので、

$$c = -\beta \frac{2}{3} \frac{g' h_0}{f_0^2} = -\frac{2}{3} \beta R_d^2 \quad (5.17)$$

となる。ここで、 R_d は厚さ h_0 の流体に対するロスビーの変形半径。また、 $-\beta R_d^2$ はロスビー長波の速度である。

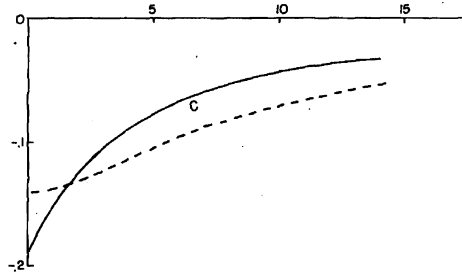


Figure 5.3: 渦位一定のレンズ渦の西向き速度の渦位依存性。点線は渦の平均の厚さと同じ reduced gravity から計算されたロスビー長波速度。Flierl (1984) による。

西へ行く理由は簡単である。(5.14)を見れば良い。 β 平面では、同じ大きさの東西流に働くコリオリ力は高緯度ほど大きくなる。それ故、同心円状の南北対象な渦を考えた場合、それが高気圧性渦であれば、北半分の東向き流による南向きのコリオリ力の方が、南半分の西向き流による北向きのコリオリ力より大きく、それ故、渦に対する正味の力は南向きに働く。その南向きのコリオリ力と釣り合うためには、渦自体が西向きに動かねばならないということになる。

5.1.3 渦の南下: 下層の影響

前節では無限に厚い(ただし静水圧は成り立っている)一様密度の流体の上に浮かんだのレンズ渦を見た。この場合、周りの流体中の波は無限に速く、それ故、レンズ渦は周りの流体から影響を受けない。しかし、実際の地球流体では流体層の厚さは有限であり、また成層があったりする。それ故、常に、有限の速度を持つ波が周囲にあると考えねばならない。周囲の流体層(以下では下層と呼ぶ)の厚さが厚いけれども有限である状況を考えるのは、Nof (1981)の理論の自然な発展である。それは Flierl (1984)によってなされた。

下層が存在し、下層の圧力を p_2 とすると、上層の圧力は $p_1 = \rho_0 g' h + p_2$ である。この時、(5.10)-(5.11)は

$$\frac{\partial}{\partial \tau} hu + \frac{\partial}{\partial \xi} [hu(u - \dot{X})] + \frac{\partial}{\partial \eta} [hu(v - \dot{Y})] - (f_0 + \beta y)hv = -\frac{g'}{2} \frac{\partial h^2}{\partial \xi} - \frac{1}{\rho_0} h \frac{\partial p_2}{\partial \xi} \quad (5.18)$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} hv + \frac{\partial}{\partial \xi} [hv(u - \dot{X})] + \frac{\partial}{\partial \eta} [hv(v - \dot{Y})] + (f_0 + \beta y)hu = -\frac{g'}{2} \frac{\partial h^2}{\partial \eta} - \frac{1}{\rho_0} h \frac{\partial p_2}{\partial \eta} \quad (5.19)$$

となる。(5.18), (5.19)の右辺の最後の項を通じて、上層と下層で運動量のやり取りがなされる。

渦が変形しないと仮定し、(5.18), (5.19)をレンズ渦上で積分する。(5.13)の流線関数

を用いると、

$$-\dot{Y} \int \int (f_0 + \beta y) h d\xi d\eta = \frac{1}{\rho_0} \int \int p_2 \frac{\partial h}{\partial \xi} d\xi d\eta \quad (5.20)$$

$$-\beta \int \int \phi d\xi d\eta - \dot{X} \int \int (f_0 + \beta y) h d\xi d\eta = \frac{1}{\rho_0} \int \int p_2 \frac{\partial h}{\partial \eta} d\xi d\eta \quad (5.21)$$

となる。これらの式の右辺の意味するところは、傾いた密度界面の両側で圧力 p_2 が異なると下層の圧力場が渦を押し形になる、ということである。例えば、渦が西へ移動する場合、渦の西側で下層の圧力が高くなることことが予想され、そうすると (5.20) は正となり、渦の西向き進行を妨げようとするであろう。つまり、これは形状抵抗 (form-drag) である。

この形状抵抗が実際にどのように現れるかを考えるために、下層が上層に比べて十分に分厚いとする。また、前節と同様 βr_0 も f_0 に比べて十分に小さいとする。すなわち、

$$\delta = \frac{h_0}{H} \ll 1, \quad \hat{\beta} = \frac{\beta r_0}{f_0} \ll 1$$

という状況である。ここで、 H は下層の厚さ。下層の運動は上層 (レンズ渦) の運動により引き起こされるので、下層の圧力、 p_2 、の大きさは、

$$p_2 \simeq \frac{h_0}{H} p_1$$

となる。上層の圧力 $p_1 = \rho_0 g' h + p_2$ は、第ゼロ近似的には $\rho_0 g' h$ である。

このように下層がレンズの厚さ h_0 に比べて十分に厚ければ、下層は準地衡流渦度方程式に支配される。準地衡流渦位は、流線関数を $\psi = p_2 / \rho_0 f_0$ とすると

$$q = \nabla_H^2 \psi + \frac{f_0 h}{H} + \beta y$$

なので、方程式は

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla_H^2 \psi + J(\psi, \nabla_H^2 \psi) + \beta \frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{f_0}{H} \left[\frac{\partial h}{\partial t} + J(\psi, h) \right] \quad (5.22)$$

となる。 (\dot{X}, \dot{Y}) でレンズとともに移動する座標系に移れば、

$$\left(\frac{\partial}{\partial \tau} - \dot{X} \frac{\partial}{\partial \xi} - \dot{Y} \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \nabla_H^2 \psi + J(\psi, \nabla_H^2 \psi) + \beta \frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{f_0}{H} \left[\left(\frac{\partial}{\partial \tau} - \dot{X} \frac{\partial}{\partial \xi} - \dot{Y} \frac{\partial}{\partial \eta} \right) h + J(\psi, h) \right] \quad (5.23)$$

である。(5.22b)、(5.18)-(5.22) を連立して解けば良い。

[ロスビー波の放射]

下層の影響を最もシンプルに見る方法としては、海洋を考えた場合にはあまり現実的で

はないが、 H 無限大の前節の解に、下層の影響を若干入れるという立場で、 $\delta \ll \hat{\beta} \ll 1$ というパラメータを考えるというのがある (惑星 β ではなく地形性 β =底の傾斜と思えば、非現実なわけでもない: Sweters, 1998)。これは Flierl (1984) によってなされた。この場合、レンズ状渦の密度界面変位に伴う地形性 β よりも惑星 β の方が大きいという仮定である。この時第ゼロ近似では、§5.1.2 と同じになる。したがって、渦の速度は、(5.29) である。下層は、この西向き渦により駆動され、方程式は

$$-c_0 \frac{\partial}{\partial \xi} \nabla_H^2 \psi + \beta \frac{\partial \psi}{\partial \xi} = c_0 \frac{f_0}{H} \frac{\partial h}{\partial \xi} \quad (5.24)$$

ξ で積分して、

$$\nabla_H^2 \psi - \frac{\beta}{c_0} \psi = -\frac{f_0}{H} h \quad (5.25)$$

この方程式はロスビー波の解を持ち (chap.2)、密度界面変位に対する特解は

$$\psi_p = -\frac{\pi f_0}{2H} \int_0^r r' J_0(kr') Y_0(kr) h(r') dr' - \frac{\pi f_0}{2H} \int_r^{r_0} r' J_0(kr) Y_0(kr') h(r') dr' \quad (5.26)$$

と書ける。ここで、 $k = (-\beta/c_0)^{1/2}$ で r は中心からの距離。実際の ψ はこれに西方では流れがないという条件 $\psi \rightarrow 0$ as $\xi \rightarrow -\infty$ を満足するように、自由ロスビー波 (§2.3) を重ねたものである。 $r > r_0$ では $h(r) = 0$ なので

$$\psi_p = -\frac{\pi f_0}{2H} Y_0(kr) \int_0^{r_0} r' J_0(kr') h(r') dr' \quad (5.27)$$

となる。これと $\psi \rightarrow 0$ as $\xi \rightarrow -\infty$ を用いて、 ψ は

$$\psi(r, \theta) = \psi_p(r) - \frac{2f_0}{H} \int_0^{r_0} r' J_0(kr') h(r') dr' \sum_{n=0}^{\infty} \frac{J_{2n+1}(kr) \cos[(2n+1)\theta]}{2n+1} \quad (5.28)$$

となる。

この解では、上層渦が順圧ロスビー波を励起する。ロスビー波は西向き運動量を持つため、ロスビー波の励起は、西向き運動量を上層から下層へ移すことになる。この時、(5.20) は

$$\begin{aligned} \dot{Y} \int \int_S (f_0 + \beta y) h \, d\xi d\eta &= \int \int_S \frac{1}{\rho_0} h \frac{\partial p_2}{\partial \xi} \, d\xi d\eta = f_0 \int \int_S h \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \, d\xi d\eta \\ &= -f_0 \int \int_S \psi \frac{\partial h}{\partial \xi} \, d\xi d\eta = -f_0 \int_0^{r_0} \int_0^{2\pi} \psi \frac{\partial h}{\partial r} \cos \theta \, r d\theta dr \\ &= \frac{2\pi f_0^2}{H} \int_0^{r_0} r J_0(kr) h(r) dr \int_0^{r_0} r J_1(kr) \frac{\partial h}{\partial r} \, dr \\ &= -\frac{2\pi f_0^2}{H} \int_0^{r_0} r J_0(kr) h(r) dr \int_0^{r_0} h \frac{\partial}{\partial r} \{r J_1(kr)\} \, dr \\ &= -\frac{2\pi f_0^2 k}{H} \left\{ \int_0^{r_0} r J_0(kr) h(r) dr \right\}^2 \end{aligned} \quad (5.29)$$

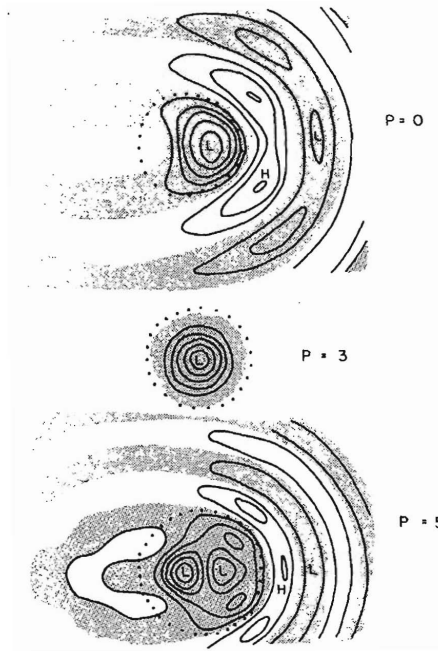


Figure 5.4: 渦位一定のレンズ渦の西向き伝播に伴う下層の流線。渦位ゼロ、とゼロでないもの二例。真ん中の例ではロスビー波の放射は起きていない。Flierl (1984) による。

となり、したがって、 $(|\beta y/f_0| \ll 1$ の条件元では)

$$c_y = \dot{Y} = -\frac{2\pi f_0 k}{H} \left\{ \int_0^{r_0} r J_0(kr) h(r) dr \right\}^2 / \int \int_S h d\xi d\eta \quad (5.30)$$

となる。 $f_0 > 0$ なら負で、 $f_0 < 0$ なら正、すなわち、必ず赤道向きであることが分かる。なお、この計算では、ベッセル関数の再帰関係

$$\frac{d}{dx} \{x^n J_n(x)\} = x^n J_{n-1}(x)$$

を用いた。

$\partial\psi/\partial r|_{r=r_0} = 0$ を満足する c_0 もあり、その場合には、 ψ はレンズ渦の下にのみ同心円状に存在し、形状抵抗は働かず、渦は西進する。ただし、これは (5.25) を $\partial\psi/\partial r|_{r=r_0} = 0$ という条件のもとで解く固有値問題の解なので、それを満足する c_0 は離散的となり、一般には赤道向きになる。

[渦対の形成: 下層に閉じた等渦位線を伴う場合]

現実的な設定であれば、惑星 β はレンズ渦による下層の伸縮効果 (α) よりもずっと小さい。 $\alpha \gg \hat{\beta}$ の場合は、Benilov (2000) によって調べられた。ここでは、どのようなことが起きるかを簡単に見てみる。

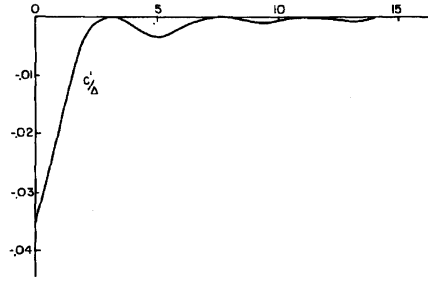


Figure 5.5: 渦位一定のレンズ渦の南向き速度の渦位依存性。速度がゼロになる渦位はのところではロスビー波の放射は起きていない。Flierl (1984) による。

初期値条件として、下層が静止している場合を考える。その静止状態から出発してその発展の様子を考えるために、時間による展開を行う。すなわち、

$$\begin{aligned}\dot{X} &= c_x^{(0)} + c_x^{(1)}\tau + c_x^{(2)}\tau^2 + \dots \\ \dot{Y} &= c_y^{(0)} + c_y^{(1)}\tau + c_y^{(2)}\tau^2 + \dots \\ \psi &= \psi^{(0)}(\xi, \eta) + \psi^{(1)}(\xi, \eta)\tau + \psi^{(2)}(\xi, \eta)\tau^2 + \dots\end{aligned}\quad (5.31)$$

これらを (??), (5.21), (5.23) に代入し、 τ の同じ次数の項でゼロになるとして、順次解いていく。ここでは、下層は初期静止なので、 $\psi^{(0)} = 0$ 。また、これを (??), (5.21) に代入することにより、 $c_y^{(0)} = 0, c_x^{(0)} = -\beta \int \int_S \phi \, dx dy / \int \int_S f_0 h \, d\xi d\eta$ を得る。

$O(\tau^1)$ の式は

$$-c_y^{(1)} \int \int f_0 h d\xi d\eta = f_0 \int \int \psi^{(1)} \frac{\partial h}{\partial \xi} d\xi d\eta \quad (5.32)$$

$$-c_x^{(1)} \int \int f_0 h d\xi d\eta = f_0 \int \int \psi^{(1)} \frac{\partial h}{\partial \eta} d\xi d\eta \quad (5.33)$$

$$\nabla_H^2 \psi^{(1)} = \frac{c_x^{(0)} f_0}{H} \frac{\partial h}{\partial \xi} \quad (5.34)$$

である。同心円状の渦を仮定しているので、 h は r のみの関数。それ故、 $\partial h / \partial \xi = \cos \theta dh / dr$ 。したがって

$$\begin{aligned}\psi^{(1)} &= \hat{\psi}(r) \cos \theta \\ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{d\hat{\psi}}{dr} - \frac{1}{r^2} \hat{\psi} &= \frac{c_x^{(0)} f_0}{H} \frac{dh}{d\xi}\end{aligned}$$

となる。さらに、左辺は

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{d\hat{\psi}}{dr} - \frac{1}{r^2} \hat{\psi} = \frac{d}{dr} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \hat{\psi}$$

なので、

$$\psi^{(1)} = \hat{\psi} \cos \theta = \frac{1}{r} \frac{c_x^{(0)} f_0}{H} \int_0^r r h dr \cos \theta \quad (5.35)$$

と、 $\psi^{(1)}$ は求まる。 $c_x^{(0)} < 0$ なので、 $f_0 > 0$ の場合、西側では $\psi^{(1)}$ は正、東側では負となる渦対構造を持つ。これを用いて、(5.33) より $c_x^{(1)} = 0$, (5.33) より $c_y^{(1)}$ は赤道向きであることが分かる。赤道向き速度は時間とともに増加する。西向き速度はほぼ一定なので、軌跡は放物線となる。上層の渦が西に動くことにより、その渦の中心より西側では、下層の流体は縮められ、高気圧性の循環が生じる。他方、東側では、引伸ばされて低気圧性となる。この下層に生じる渦対構造が上層の渦を赤道方向に動かす。これは、 τ が小さいという仮定の下の結果であるが、長い時間を考えても定性的には同じであり、赤道向き速度は時間とともに増加し、すぐに、西向き速度よりも大きくなることが、Benilov (2000) によって示されている。

下層の等渦位線が閉じている場合、上層にレンズ渦を考えて数値実験をすると、下層の渦位分布に伴う (レンズ渦の周りをまわる) 波とレンズの縁に捕捉された前線波が結合した傾圧不安定を通常は起し、上層渦は壊れる。Ito and Kubokawa (2003) はこれを避けるために 2.5 層にして数値実験を行った (2.5 層というのは、3 層目を考え、3 層目を無限に深いとしたものである)。このようにすると、傾圧不安定は起きなくなる。これは (真面目に研究しなければいけないが)、下層の渦位分布に伴う波の速度が β による渦の西向き移動速度よりも小さくなり、結合しなくなるからであると考えられる。そのようなモデルで長時間計算された結果を示す。

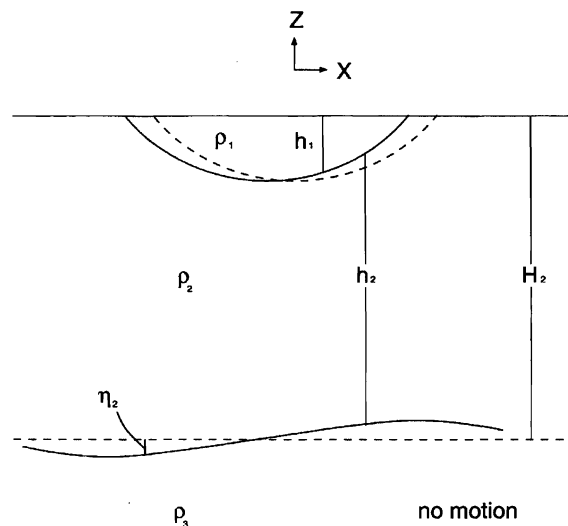


Figure 5.6: 2.5 層モデル。Ito and Kubokawa (2003) より。

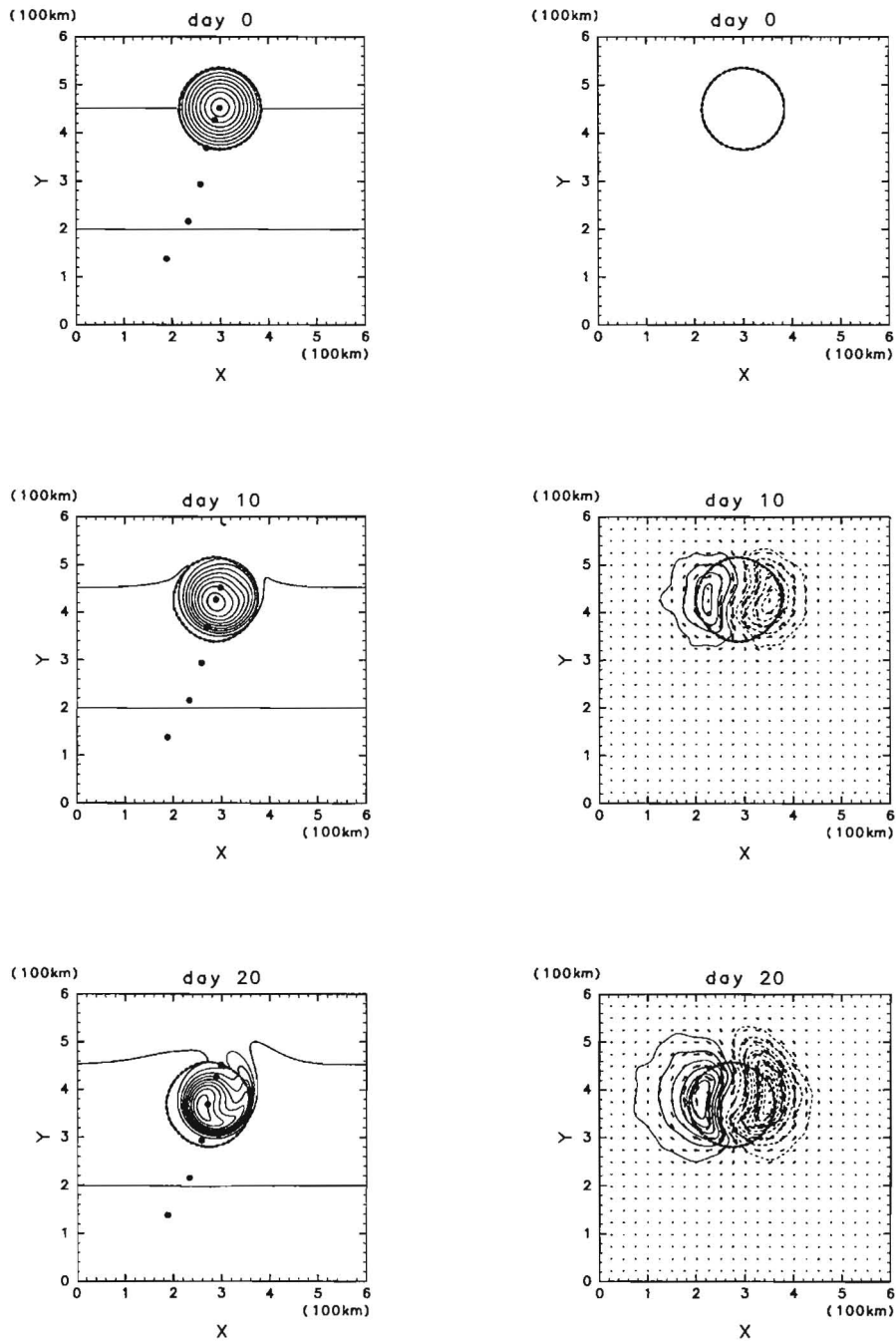


Figure 5.7: 2.5層モデルにおけるレンズ渦の移動。左図：2層目の渦位(コンター)とその時刻でのレンズ渦の位置(点線)、および渦の軌跡(黒丸)。右図：流速ベクトルと2層目の深さ(コンター) Ito and Kubokawa (2003) より。

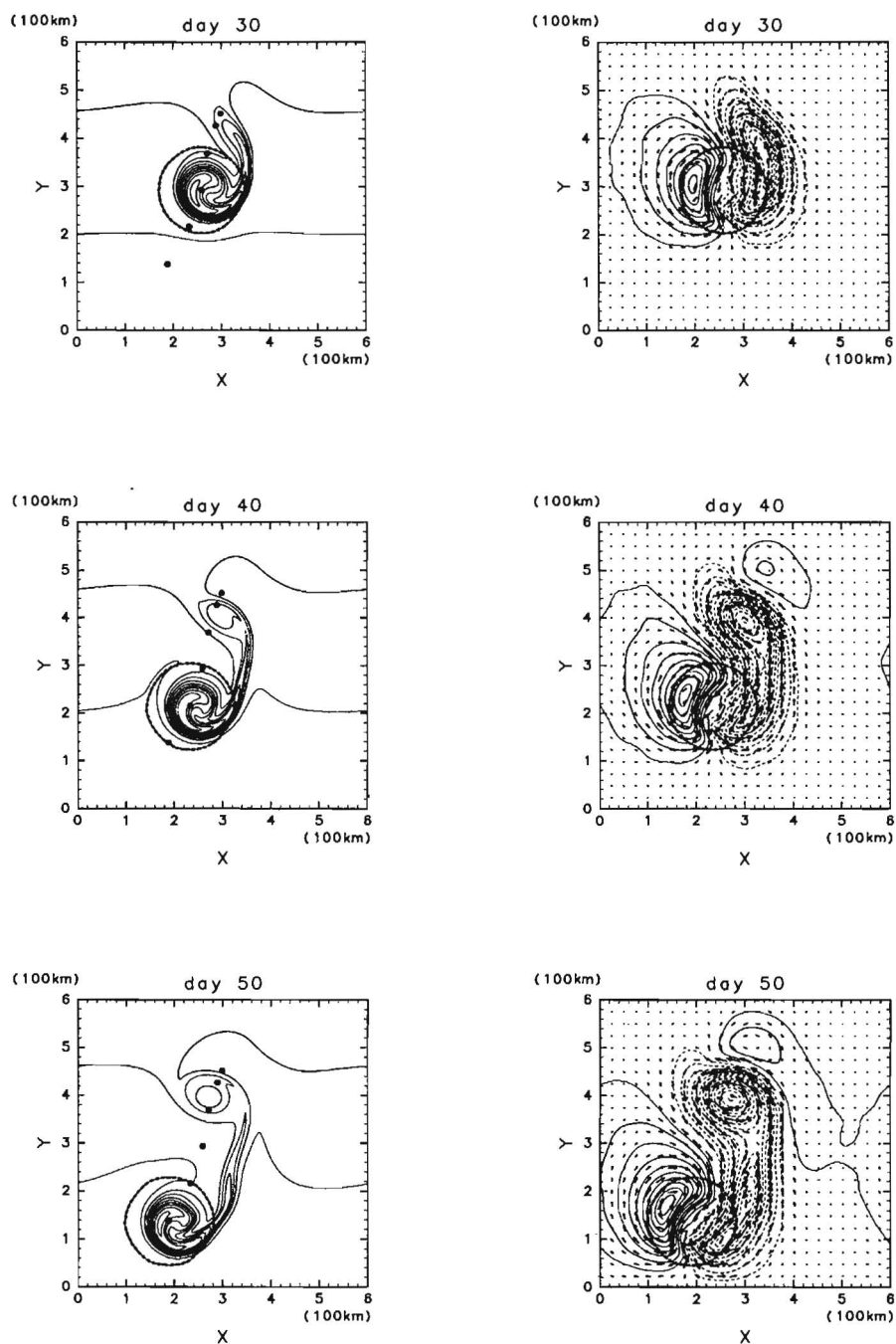


Fig.5.7 の続き

レンズが β 効果で西に若干移動することにより、下層には渦対構造が生じ、南に移動していくことになる。初期の発展は Benilov(2000) の理論と同様であるが、移動速度は時間とともに一定に近づいていく。本来 β 面を南北に定常移動することは有り得ないのだが、この場合かなり一定に近い値になる。

[レンズの南下とエネルギー保存]

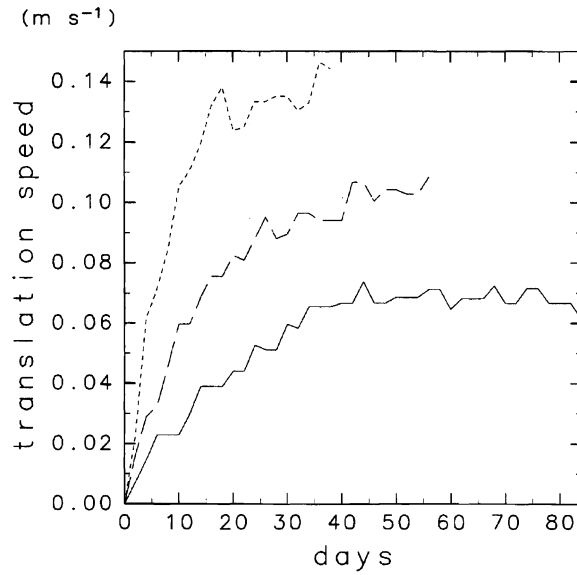


Figure 5.8: 2.5層モデルにおけるレンズ渦の移動速度の時間変化 (β による違い)。最初時間とともに増加。その後ほぼ定常に達する。Ito and Kubokawa (2003) より。

この渦の南北移動はエネルギーの観点から議論することもできる。レンズ渦のエネルギーは

$$E = \int_0^{r_0} \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{1}{2} h v_\theta^2 + \frac{1}{2} g' h^2 \right\} r d\theta dr \quad (5.36)$$

である。渦位ゼロであれば、(多分)

$$E = \frac{8\pi g'^2 h_0^3}{3f^2}. \quad (5.37)$$

他方、渦が南北に移動したときには渦位と質量 (体積) を保存するので、 h_0 は f の関数。体積を V とすると、渦位ゼロの場合には (多分)

$$V = \int_0^{r_0} \int_0^{2\pi} h r d\theta dr = \frac{4\pi g' h_0^2}{f^2} \quad (5.38)$$

となり、 h_0 は f に比例する。したがって、エネルギーも f に比例し、渦が低緯度へ行けば渦のエネルギーは減少する。このことより、ロスビー波放射に伴う渦の南下は、レンズ渦からロスビー波に移ったエネルギーの分だけ南下していることになる。また、高気圧性渦が高緯度に行くには、外部の流れによって運ばれる以外には有り得ないことが分かる。その場合には、外部の流れから仕事をされてエネルギーが増加する。

[参考：(5.26)、(5.28)の導出]

(5.25)は

$$\frac{d}{dr} \left[r \frac{d\psi}{dr} \right] + k^2 r \psi = -\frac{f_0 r}{H} h$$

である。この式を解くために、 $G(r, r')$ に関する方程式、

$$\frac{d}{dr} \left[r \frac{dG}{dr} \right] + k^2 r G = \delta(r - r') \quad (5.39)$$

を考える。この式では、 $r = r'$ に δ 関数的な強制を考えている。この $\delta(r)$ は通常の1次元のデルタ関数 ($f(x) = \int f(x')\delta(x - x')dx'$) である。

$r < r'$ の解を $G_I(r, r')$ 、 $r > r'$ の解を $G_O(r, r')$ とすると、外側の解 G_O は、同次解 J_0 と独立なものを考える (同次解は常に解の特解は必ずそれと独立な Y_0 を持つ)。すなわち、 $G_O \sim Y_0$ 。内側では $r = 0$ で有限でなければならないので、 $G_I \sim J_0$ 。 $r = r'$ では $G_I = G_O$ なので、結局、

$$G_I(r, r') = AY_0(kr')J_0(kr), \quad G_O(r, r') = AY_0(kr)J_0(kr')$$

と書ける。次に、 $r = r'$ を挟む微小区間での(5.39)の積分

$$\left[r \frac{dG}{dr} \right]_{r'-\varepsilon}^{r'+\varepsilon} + \int_{r'-\varepsilon}^{r'+\varepsilon} k^2 r' G(r', r') dr = \int_{r'-\varepsilon}^{r'+\varepsilon} \delta(r - r') dr = 1$$

で $\varepsilon \rightarrow 0$ の極限を取ることにより、接続条件、

$$Ar' \left\{ J_0(kr') \frac{dY_0}{dr} \Big|_{r=r'} - Y_0(kr') \frac{dJ_0}{dr} \Big|_{r=r'} \right\} = 1$$

を得る。ベッセル関数 $J_n(x), Y_n(x)$ の性質として、

$$J_n \frac{dY_n}{dx} - Y_n \frac{dJ_n}{dx} = \frac{2}{\pi x}$$

なので、上の接続条件より、 $A = \pi/2$ 。よって、

$$G_I(r, r') = \frac{\pi}{2} Y_0(kr') J_0(kr), \quad G_O(r, r') = \frac{\pi}{2} Y_0(kr) J_0(kr')$$

特解は

$$\psi_p(r) = -\frac{\pi f_0}{2H} \left\{ \int_0^r G_O(r, r') h(r') r' dr' + \int_r^{r_0} G_I(r, r') h(r') r' dr' \right\}$$

より、(5.26)となる。

実際の解は、これに自由ロスビー波の解 (2.60) が重なったものである。 $\xi \rightarrow -\infty$ で $\psi \rightarrow 0$ を満足するようにロスビー波の解を選べば良い。ここで必要なのが、遠方場でのベッセル関数の漸近的な構造:

$$J_n(r) \simeq \sqrt{2/(\pi r)} \cos(r - \frac{1}{2}n\pi - \frac{1}{4}\pi)$$

$$Y_n(r) \simeq \sqrt{2/(\pi r)} \sin(r - \frac{1}{2}n\pi - \frac{1}{4}\pi)$$

これと南北対称性から (5.28) は求まる。対称性から

$$\psi_h = \sum_{n=0}^{\infty} D_n J_{2n+1}(kr) \cos[(2n+1)\theta]$$

であるが、その遠方での構造は

$$\begin{aligned} \psi_h &\simeq \sum_{n=0}^{\infty} D_n \sqrt{2/(\pi kr)} \cos(kr - \frac{1}{2}(2n+1)\pi - \frac{1}{4}\pi) \cos[(2n+1)\theta] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n D_n \sqrt{2/(\pi kr)} \sin(kr - \frac{1}{4}\pi) \cos[(2n+1)\theta] \end{aligned}$$

他方、 ψ_p の遠方での構造は、

$$\psi_p \simeq \frac{\pi f_0}{2H} \int_0^{r_0} r' J_0(kr') h(r') dr' \sqrt{2/(\pi kr)} \sin(kr - \frac{1}{4}\pi)$$

$x < 0$ の遠方場で、 $\psi_p + \psi_h = 0$ なので、

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n D_n \sqrt{2/(\pi kr)} \cos[(2n+1)\theta] = \frac{\pi f_0}{2H} \int_0^{r_0} r' J_0(kr') h(r') dr', \quad \text{for } \frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2}$$

この両辺に、 $\cos[(2n+1)\theta]$ をかけて、 $\pi/2$ から $3\pi/2$ まで積分し、

$$D_n = \frac{2f_0}{(2n+1)H} \int_0^{r_0} r' J_0(kr') h(r') dr'$$

を得る。

5.2 渦の移動、渦と渦の相互作用

前節では、 β 効果によってバラバラにならない単極渦として、高気圧性の強い渦であるレンズ状の渦を考えた。レンズは β 効果では壊れないため、解析的な扱いもそれなりに可能となり、比較の見通しの良い結果を得ることができる。しかし、それによる結果は高気圧性の渦に限られ、さらに、全ての渦が周囲の流体から切り離されているわけではない。

したがって、一般の高気圧性の孤立渦、台風のような低気圧性の孤立渦の移動を考えるためには、水平方向の渦との相互作用も考えていかなければいけない。

レンズ渦の南北移動で見られたメカニズムは、密度界面変位を持つ渦が西に移動し、その影響で、(1) ロスビー波が発生し、上層渦に形状抵抗を与える、もしくは、(2) 渦の下での渦柱の伸縮により、東西に渦が並んだ渦対が出来それにより上層渦が移流されるということであり、これらの効果自体はレンズでない高気圧性渦でも、低気圧性渦でも働くであろうことが予想される。低気圧性渦の場合、(2) では、低気圧性渦の前面(西側)の下層では渦が伸ばされることによる低圧部ができ、東側では逆に縮み高圧部ができる。その2層目の渦対により、低気圧性渦は北に進む。低気圧性渦も南北移動してもその構造を維持できるとすれば、高緯度に行くほどエネルギーは減少する。したがって、エネルギーを失うようなことがあれば高緯度に行く。その時間問題になるのは、渦がどれだけ個性を維持できるかということである。

レンズ渦のように水平方向に孤立していない一般の単極渦では、この鉛直方向の構造に加え、上に述べたように、水平方向の渦との相互作用も考えていかなければいけない。 β 平面上の単極渦は、例えば、低気圧性であれば、東側で南から西側では北から惑星渦度を移流することになり、東に高気圧性、西に低気圧性の2次循環が出来る。これにより、渦は北に移動する。これを β -gyre といい、台風の移動メカニズムとして真っ先に出てくるものである。

Morel and McWilliams (1997) の数値実験結果を中心に、その辺りを見てみる。

引用文献

- Bachelor, G.K. (1967): An Introduction to Fluid Dynamics. Cambridge Univ. Press, 615pp.
- Benilov E. S. (2000): The dynamics of a near-surface vortex in a two-layer ocean on the beta-plane. *J. Fluid Mech.*, **420**, 277-299.
- Flierl, G.R. (1984): Rossby Wave Radiation from a Strongly Nonlinear Warm Eddy. *J. Physical Oceanogr.*, **14**, 47-58.
- Flierl, G.R., V.D. Larichev, J.C. McWilliams and G.M. Reznik (1980): The dynamics of baroclinic and barotropic solitary eddies. *Dyn. Atmos. Oceans*, **7**, 233-263.
- 広田良吾 (1992): 直接法によるソリトンの数理, 岩波書店. 202pp.
- Ito, Y. and A. Kubokawa (2003): Southward translation of strongly nonlinear warm eddies in a 2 1/2-layer β -plane model. *J. Phys. Oceanogr.*, **33**, 1250-1273.
- Killworth P. D., 1983: On the motion of isolated lenses on a beta-plane. *J. Phys. Oceanogr.*, **13**, 368-376.
- Kubokawa, A. (1988): Instability and nonlinear evolution of a density-driven coastal current with a surface front in a two-layer ocean. *J. Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.*, **40**, 195-223.
- Kubokawa, A. (1989): Growing solitary disturbance in a baroclinic boundary current. *J. Phys. Oceanogr.*, **19**, 182-192.
- Larichev, V. and G. Reznik (1976): Two-dimensional Rossby soliton: an exact solution. *Rep. USSR Acad. Sci.*, **231**(5).
- Larsen, L.H. (1965): Comments on 'Solitary waves in the Westarlies', *J. Atmos. Sci.*, **22**, 222-224.
- Long, R. (1964): Solitary waves in the Westarlies, *J. Atmos. Sci.*, **21**, 197-200.
- McWilliams, J.C. and N.J. Zbuasky (1982): Interactions of isolated vortices. I: Modons colliding modons. *Dyn. Atmos. Oceans*, **19**, 207-227.
- Mied, R.P. and G.J. Lindemann (1979): The Propagation and Evolution of Cyclonic Gulf Stream Rings. *J. Physical Oceanogr.*, **9**, 1183-1206.
- Morel, Y. and J.C. McWilliams (1997): Evolution of Isolated Interior Vortices in the Ocean. *J. Phys. Oceanogr.*, **27**, 727-748.
- Nof D. (1981): On the β -induced movement of isolated baroclinic eddies. *J. Phys. Oceanogr.*, **11**, 1662-1672.
- Redekopp, L.G. (1977): On the theory of solitary Rossby waves. *J. Fluid Mech.*, **82**, 725-745.
- Stern, M.E. (1975): Minimal properties of planetary eddies. *J. Mar. Res.*, **33**, 1-13.
- Zabusky, N.L. and M.D. Kruskal (1965): "Solitons" in a collisionless plasma and the recurrence of initial states. *Phys. Rev. Lett.*, **15**, 240-243.