第 1 回 (2019.04.09) の内容

1. イントロダクション

2. 力学の復習

   (a) ニュートンの三法則

      i. 慣性の法則は、「力が作用していない場合、物体は静止しているか、等速直線運動を続ける」というもので、これは「慣性系の定義である」と解釈される。

      ii. 運動の法則は、「運動量 (質量 $\times$ 速度) が時間によって変化する割合はその物体に働く力の大きさに比例し、その力の向きに生じる」である。

      iii. 作用反作用の法則は、ある物体 A が物体 B に力を及ぼせば、物体 A は物体 B から同じ大きさの力を受けるという事をいう。力の向きで言えば、A から B と B から A なので、方向は逆になる。

   (b) ニュートンの運動方程式と運動量の式: 物体 (ここでは、質量が一点に集中した質点を考える) の質量を m, 速度を $\mathbf{v}$, その物体に働く力を $\mathbf{F}$ とすると、運動の法則は

$$\frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = \mathbf{F} \ ; \qquad \text{運動量の時間変化} = \text{力} \tag{1}$$

   (c) 運動エネルギーの式、仕事、保存力、力学的エネルギー: (1) の両辺と $\mathbf{v}$ の内積を取る。

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m|\mathbf{v}|^2\right) = \mathbf{v}\cdot\mathbf{F} \ ; \qquad \text{運動エネルギーの時間変化} = \text{仕事率} \tag{2}$$

   力 $\mathbf{F}$ が場所のみに依存し、$\nabla\times\mathbf{F} = 0$ を満足する場合には、スカラー関数 $\Phi(\mathbf{r})$ を用いて、$\mathbf{F} = -\nabla\Phi$ と表現できる。このような力を保存力という。$\dfrac{d}{dt}\Phi(\mathbf{r}(t)) = \nabla\Phi\cdot\dfrac{d\mathbf{r}}{dt} = \nabla\Phi\cdot\mathbf{v}$ となるので、(2) の右辺は $-d\Phi/dt$ となり、それを左辺に移せば、

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m|\mathbf{v}|^2 + \Phi\right) = 0 \ ; \qquad \text{力学的エネルギーの保存} \tag{3}$$

   (d) 角運動量の保存: 位置ベクトル $\mathbf{r}$ と (2) のベクトル積から

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r}\times m\mathbf{v}) = \mathbf{r}\times\mathbf{F} \ ; \qquad \text{角運動量の時間変化} = \text{力のモーメント} \tag{4}$$

   $\mathbf{r}$ と $\mathbf{F}$ が平行な (中心力の) 場合、右辺はゼロになるので、角運動量は保存する。なお、原点の取り方は任意なので、任意の点周りの角運動量を定義できる。

3. 局所時間微分と Lagrange 微分 (テキストの §2.1)

   (a) 物質微分 (Lagrange 微分): 物体に着目した時間微分

   (b) 局所時間微分（Euler 微分): 空間座標を固定した時の時間微分

   (c) 物質微分 = 局所時間微分 + 移流

   (d) 定常状態

4. 連続の式 (テキストの §2.2)

   (a) ある領域の流体の質量の時間変化は、その領域に入ってくる正味の質量に等しい。

   (b) 密度の局所時間微分は密度フラックスの収束: $\dfrac{\partial\rho}{\partial t} = -\nabla\cdot(\rho\mathbf{v})$

   (c) 密度の Lagrage 微分は密度と流速の収束の積: $\dfrac{D\rho}{Dt} = -\rho\nabla\cdot\mathbf{v}$

   (d) $\nabla\cdot\mathbf{v}$ は微小領域の体積変化率: $\dfrac{1}{V}\dfrac{DV}{Dt} = \nabla\cdot\mathbf{v}$（ここで、$V$ は微小体積)

第 2 回 (2019.04.16) の内容

1. 前回の復習
   (a) 流体粒子、流体要素、座標成分の表記
   (b) lagrange 微分は流体粒子にくっついてその時間変動を見るもの
   lagrange 微分は局所時間微分を用いて $\dfrac{D}{Dt} = \dfrac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla$ と書ける
   (c) 速度は流体粒子の位置の Lagrange 微分。加速度は流体粒子の速度の Lagrange 微分。

2. 連続の式：
   (a) Euler 的：固定されたある点での密度の時間変化は、密度フラックスの収束で決まる。$\partial\rho/\partial t = -\nabla \cdot (\rho\mathbf{v})$
   (b) lagrange 的：ある流体粒子の密度変化は、その流体粒子の体積変化に対応する流速の発散と ρ の積で決まる。$D\rho/Dt = -\rho\nabla \cdot \mathbf{v}$

3. 運動方程式
   (a) ニュートンの運動方程式に従う $\dfrac{D}{Dt}$(運動量) = 力
   (b) 力には、流体が互いに及ぼし合う力＝面積力、もしくは、応力 (stress) と体積力 (body force)
   (c) (理想流体での) 流体粒子の加速は圧力傾度力と体積力 (重力など) による
   (d) 方程式は、
   $$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \mathbf{K}$$
   となる。

4. 非圧縮の仮定
   (a) 音波に比べて流速が十分に小さいと、流動によっては圧縮はほとんど起きないので、運動に関しては、非圧縮と考えてよい。$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$
   (b) これは音速が無限に大きいことを仮定することになり、音波が方程式から除去される。
   密度の式は、加熱の効果などを含めて、例えば、$D\rho/Dt = Q$ のような形に置いたりする。

5. Chapter3. Bernoulli の定理
   (a) 方程式：運動方程式の移流項を傾き (gradient) と回転に分離する
   (b) 静止状態：静水圧。密度が一定 (一般には、圧力のみの関数) なら、水面等がなければ、流体運動には上も下もない。
   (c) 定常状態：Bernoulli 面上では、Bernoulli 関数が一定。流体粒子の加速減速は圧力傾度力により、流線に沿って流速の増加と圧力の減少が 1 対 1 に対応する。
      i. 風圧とは何か？　Pitot 管
      ii. パイプの内径を変えると噴水の高さが変わる (水芸の原理？)
      iii. Torricelli の定理：水時計が作れる？
   (d) 流線の曲率と圧力勾配 (§3.4) はスキップ (授業では扱わない)。興味のある人は読んで欲しい。
   [§3.3 の Bernoulli 面上での運動は、実は、渦度ゼロでの運動である。渦度ゼロでは流線の曲率と流速の変化が 1 対 1 対応なので、$\frac{1}{2}|\mathbf{v}|^2 + p/\rho_0 + \phi =$ 一定が流線を超えても成り立つ. 問題 3.4.2]

第 3 回 (2019.04.23) の内容

1. 前回の復習
   (a) 連続の式：
      i. Euler 的：固定されたある点での密度の時間変化は、密度フラックスの収束で決まる。$\partial\rho/\partial t = -\nabla\cdot(\rho\mathbf{v})$
      ii. lagrange 的：ある流体粒子の密度変化は、その流体粒子の体積変化に対応する流速の発散と ρ の積で決まる。$D\rho/Dt = -\rho\nabla\cdot\mathbf{v}$
   (b) 運動方程式：$\dfrac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\dfrac{1}{\rho}\nabla p + \mathbf{K}$
   (c) 非圧縮の仮定：流速が音速より十分に小さければ、流体の運動によっては圧縮が起きない (圧縮が起きないように動く)。$\nabla\cdot\mathbf{v} = 0$
   これは音速が無限に大きいことを仮定することになり、音波が方程式から除去される。
   密度の式は、加熱の効果などを含めて、例えば、$D\rho/Dt = Q$ のような形に置いたりする。

2. Chapter3. Bernoulli の定理
   (a) 方程式：運動方程式の移流項を傾き (gradient) と回転に分離する
   (b) 静止状態：静水圧。密度が一定 (一般には、圧力のみの関数) なら、水面等がなければ、流体運動には上も下もない。
   (c) 定常状態：Bernoulli 面上では、Bernoulli 関数が一定。流体粒子の加速減速は圧力傾度力により、流線に沿って流速の増加と圧力の減少が 1 対 1 に対応する。
      i. 風圧とは何か？　Pitot 管
      ii. パイプの内径を変えると噴水の高さが変わる (水芸の原理？)
      iii. Torricelli の定理：水時計が作れる？
   (d) 流線の曲率と圧力勾配 (§3.4) はスキップ (授業では扱わない)。興味のある人は読んで欲しい。[§3.3 の Bernoulli 面上での運動は、実は、渦度ゼロでの運動である。渦度ゼロでは流線の曲率と流速の変化が 1 対 1 対応なので、$\frac{1}{2}|\mathbf{v}|^2 + p/\rho_0 + \phi =$ 一定が流線を超えても成り立つ. 問題 3.4.2]

3. Chapter4. 渦、渦度、循環 (前半)
   (a) 渦度と循環：
      i. 渦度：渦を定量的に表すための物理量が渦度。渦には強さと方向がある。方向は回転の軸の方向とする。→渦度はベクトル ($\omega = \nabla\times\mathbf{v}$)。微小部分の回転は必ずしも全体の回転を表さない→シア流は渦度を持つ。渦度は非発散。非発散のものは始まりも終わりもない。
      ii. 循環：渦度はベクトルで扱いにくい。循環 = 流速の閉曲線上に沿う一回り積分 = 閉曲線の内部を通過する渦度の総量。渦度ベクトルの束 = 渦管を考える。その断面の積分が循環。渦管では、断面での平均の渦度 $\bar{\omega}$ と断面積の積 A が一定になる。$\bar{\omega}A =$ 一定　→細いところでは渦度が大きい。

第 4 回 (2019.05.07) の予定内容・要点

1. 前回の復習

   (a) Bernoulli の定理

      i. 方程式：運動方程式の移流項を傾き (gradient) と回転に分離する

      ii. 静止状態：静水圧。密度が一定 (一般には、圧力のみの関数) なら、水面等がなければ、流体運動には上も下もない。

      iii. 定常状態：Bernoulli 面上では、Bernoulli 関数が一定。流体粒子の加速減速は圧力傾度力によるので、流線に沿って流速の増加と圧力の減少が 1 対 1 に対応する。

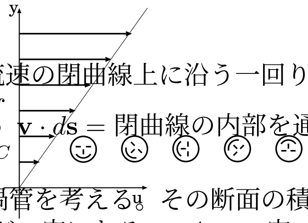
   (b) 渦度と循環：
   渦度：渦を定量的に表すための物理量が渦度。渦には強さと方向がある。方向は回転の軸の方向とする。→渦度はベクトル ($\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{v}$)。微小部分の回転は必ずしも全体の回転を表さない→シア流は渦度を持つ。

   (c) 渦度: 渦度は非発散。$\nabla \cdot \boldsymbol{\omega} = 0$. 非発散のものには始まりも終わりもない。

2. Chapter4. 渦、渦度、循環

   (a) 渦度と循環：

      i. 循環：渦度はベクトルで扱いにくい。そこで、渦度の空間積分に対応するスカラー量を導入する。(このようにして導入される量が lagrage 的に保存するので、物理の理解は、渦度よりも容易になる)



$$\begin{aligned} \text{循環 } \Gamma &= \text{流速の閉曲線上に沿う一回り積分} \\ &= \oint_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} = \text{閉曲線の内部を通過する渦度の総量} = \int_A \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n} dA \end{aligned}$$

      渦度ベクトルの束＝渦管を考える。 その断面の積分が循環。渦管では、断面での平均の渦度 $\bar{\omega}$ と断面積の積 A が一定になる。$\bar{\omega} A =$ 一定　→細いところでは渦度が大きい。

   (b) 循環定理、渦定理、ポテンシャル渦度：

      i. ケルビンの循環定理：密度一定 (より一般的には、密度が圧力のみの関数) であれば、循環は Lagrange 的に保存する。
      (Lagrange 的に保存というのは、循環を計算するときの閉曲線を構成する流体を追っていきながら、計算される循環は時間的に変化しないということ。)

      ii. ポテンシャル渦度：渦管の一部を切り取ったもの。2 つの断面積が等しい筒と見做せるならば、渦管のその部分の長さを h とした時、$\bar{\omega}/\rho h$ が Lagrange 的に保存する。
      ポテンシャル渦度の保存は、角運動量の保存と同じである。

   (c) 渦度方程式：運動方程式の回転 ($\nabla \times$) を取ると、渦度ベクトルの時間発展の式が出てくる。

      渦度の Lagrange 微分＝伸縮項＋傾き項＋傾圧項

第 5 回 (2019.05.14) の予定内容・要点

1. 前回の復習

   (a) 渦度と循環：

   i. 循環：$\Gamma =$ 流速の閉曲線上に沿う一回り積分

   $$\Gamma \;\; = \;\; \oint_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} = \int_A \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n} dA = \text{閉曲線の内部を通過する渦度の総量}$$

   渦度ベクトルの束 = 渦管を考える。その断面の積分が循環。渦管では、断面での平均の渦度 $\bar{\omega}$ と断面積の積 A が一定になる。$\bar{\omega}A =$ 一定　→細いところでは渦度が大きい。

   (b) 循環定理、渦定理、ポテンシャル渦度：

   i. ケルビンの循環定理：密度一定 (より一般的には、密度が圧力のみの関数) であれば、循環は Lagrange 的に保存する。

   ii. ポテンシャル渦度：$\bar{\omega}/\rho h.$ ポテンシャル渦度は Lagrange 的に保存する。角運動量の保存と同じである。

   (c) 渦度方程式：渦度の Lagrange 微分 = 伸縮項＋傾き項＋傾圧項

2. Chapter5. 水の波

   (a) 浅水方程式：運動の鉛直スケールに比べて水平スケールが十分に大きい時には、運動している時も静水圧の関係が成り立つ。その結果、水平流速を $\mathbf{u} = (u, v)$、水面変位を η、水深を H とした時、密度一様なら、

   $$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla_H \mathbf{u} = -g \nabla_H \eta, \qquad \frac{\partial \eta}{\partial t} + \nabla_H \cdot [(H + \eta)\mathbf{u}] = 0$$

   を得る。ここで $\nabla_H = (\partial/\partial x,\ \partial/\partial y)$。第 2 式は流体量の保存を表し、密度の式 (2.14) と同じ形をしている。

   (b) 浅水波：線形化 (変動振幅が小さい時、従属変数の積の項は小さいとして無視すること) し、$H =$ 一定とした時、

   $$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - gH \nabla_H^2 \eta = 0$$

   を得る。定係数の線形微分方程式は、指数関数型の解を持つ。無限遠点で有限であるために、$\eta = \eta_0 \exp\{i(kx + ly - \sigma t)\}$ の形を考える。$\sigma^2 = gH(k^2 + l^2)$ であれば、これが解。

   (c) 波数ベクトル、位相速度：

   - $\mathbf{K} = (k, l)$, $\mathbf{r} = (x, y)$ とすると、$\theta = \mathbf{K} \cdot \mathbf{r} - \sigma t.$ これより、等位相線 (峰や谷) は、$\mathbf{K}$ に直交することがわかる。$\mathbf{K}$ は波数ベクトル。単位長さ辺りに $2\pi/|\mathbf{K}|$ の波が存在する。
   - $\theta = |\mathbf{K}| \left[\dfrac{\mathbf{K}}{|\mathbf{K}|} \cdot \mathbf{r} - \dfrac{\sigma}{|\mathbf{K}|} t \right].$ 位相 θ は $\mathbf{K}$ の方向へ $\sigma/|\mathbf{K}|$ の速さで移動する。$c = \pm\sigma/|\mathbf{K}|$ を位相速度という。浅水波では $c = \sqrt{gH}.$

   (d) 境界の影響 (§5.1.3) はスキップ

第 6 回 (2019.05.28) の予定内容・要点

1. 前回の復習

   (a) 浅水方程式：運動の鉛直スケールに比べて水平スケールが十分に大きい時には、運動している時も静水圧の関係が成り立つ。その結果、水平流速を $\mathbf{u} = (u, v)$、水面変位を η、水深を H とした時、密度一様なら、

   $$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla_H \mathbf{u} = -g \nabla_H \eta, \qquad \frac{\partial \eta}{\partial t} + \nabla_H \cdot [(H + \eta)\mathbf{u}] = 0$$

   を得る。ここで $\nabla_H = (\partial/\partial x,\ \partial/\partial y)$。第 2 式は流体量の保存を表し、密度の式 (2.14) と同じ形をしている。

   (b) 浅水波：線形化 (変動振幅が小さい時、従属変数の積の項は小さいとして無視すること) し、$H =$ 一定とした時、

   $$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - gH \nabla_H^2 \eta = 0$$

   を得る。定係数の線形微分方程式は、指数関数型の解を持つ。無限遠点で有限であるために、$\eta = \eta_0 \exp\{i(kx + ly - \sigma t)\}$ の形を考える。$\sigma^2 = gH(k^2 + l^2)$ であれば、これが解。

   (c) 波数ベクトル、位相速度：

   - $\theta = kx + ly - \sigma t$ が位相を与える。$2\pi/\sigma$ が周期。x 方向の波長が $2\pi/k$, y 方向が $2\pi/l$.
   - $\mathbf{K} = (k, l)$, $\mathbf{r} = (x, y)$ とすると、$\theta = \mathbf{K} \cdot \mathbf{r} - \sigma t$. これより、等位相線 (峰や谷) は、$\mathbf{K}$ に直交すること、がわかる。$\mathbf{K}$ は波数ベクトル。単位長さ辺りに $2\pi/|\mathbf{K}|$ の波が存在する。
   - $\theta = |\mathbf{K}| \left[\frac{\mathbf{K}}{|\mathbf{K}|} \cdot \mathbf{r} - \frac{\sigma}{|\mathbf{K}|} t \right]$. 位相 θ は $\mathbf{K}$ の方向へ $\sigma/|\mathbf{K}|$ の速さで移動する。$c = \pm\sigma/|\mathbf{K}|$ を位相速度という。浅水波では $c = \sqrt{gH}$.

2. Chapter5. 水の波の続き

   (a) 境界の影響 (§5.1.3) はスキップ

   (b) より一般的な水の波 (浅水近似を用いない場合)

   - 波の運動 (流速及び圧力変動) は深くなるにつれて水平波数 $|\mathbf{K}|$ で $e^{|\mathbf{K}|z}$ の形に減衰する (ここで、$z = 0$ が平均水面で、水面下では $z < 0$)。
   - 鉛直構造が波長に依存するため、位相速度に波数依存性が現れる。

   $$\sigma = \pm\sqrt{g|\mathbf{K}| \tanh |\mathbf{K}|H}, \qquad c = \pm\sqrt{\frac{g}{|\mathbf{K}|} \tanh |\mathbf{K}|H}$$

   (c) 非分散の波、分散性のある波、波群、群速度
   波は y 方向に構造を持たず、x 方向に伝わるとする。この時、$\eta = \eta_0 e^{ik(x-ct)}$ と書ける。k の異なる波を無限に重ねることにより、任意の η の分布を作ることが出来る。$\eta = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\eta}(k) e^{ik(x-ct)} dk$.

   - c が k に依存しない時、全ての成分波は同じ速度で伝わるので、形は崩れない。非分散波動。
   - c が k に依存する時、成分波の位相速度が違うため、形は崩れ、成分波に分解していく。分散性波動。
   - 波の振幅が空間的に変化し、波の存在領域が局在しているようなものを波群という。
   - 波群の移動速度は、群速度で与えられる。$c_{gx} = \frac{\partial \sigma}{\partial k}$
   - ２次元の場合、x 方向の群速度、y 方向の群速度は、それぞれ、$c_{gx} = \frac{\partial \sigma}{\partial k}, \quad c_{gy} = \frac{\partial \sigma}{\partial l}$.
   - 群速度はベクトルで、c_{gx}, c_{gy} はベクトルの成分。例えば、深水波の場合 ($\pm$ の内 $+$ を考えると)、$\sigma = \sqrt{g|\mathbf{K}|}$ なので、$c_{gx} = \frac{k}{2|\mathbf{K}|}\sqrt{\frac{g}{|\mathbf{K}|}}, c_{gy} = \frac{l}{2|\mathbf{K}|}\sqrt{\frac{g}{|\mathbf{K}|}}$

第 7 回 (2019.06.04) の予定内容・要点

1. 前回の復習
   (a) より一般的な水の波 (浅水近似を用いない場合)
   - 波の運動 (流速及び圧力変動) は深度とともに水平波数 $|\mathbf{K}|$ に依存した $e^{\pm|\mathbf{K}|z}$ の形で変化する。（深水波の場合は、単純に振幅が深さとともに小さくなる）
   - 鉛直構造が波長に依存するため、位相速度に波数依存性が現れる。

   (b) 非分散の波、分散性のある波：
   (波は y 方向に構造を持たず、x 方向に伝わるとする)
   - c が k に依存しない時、初期波形を保つ。非分散波動。
   - c が k に依存する時、初期波形は崩れ、成分波に分解していく。分散性波動。
   - 波の振幅が空間的に変化し、波の存在領域が局在しているようなものを波群という。

   (c) 非分散の波、分散性のある波、波群、群速度：
   - 波の振幅が空間的に変化し、波の存在領域が局在しているようなものを波群という。
   - 波群の移動速度は、群速度で与えられる。(波は y 方向に構造を持たず、x 方向に伝わる場合) $c_g = \dfrac{\partial \sigma}{\partial k}$.
   - ２次元の場合、x 方向の群速度、y 方向の群速度は、それぞれ、$c_{gx} = \dfrac{\partial \sigma}{\partial k}, \quad c_{gy} = \dfrac{\partial \sigma}{\partial l}$.
   - 群速度はベクトルで、c_{gx}, c_{gy} はベクトルの成分。例えば、深水波の場合 ($\pm$ の内 $+$ を考えると)、$\sigma = \sqrt{g|\mathbf{K}|}$ なので、$c_{gx} = \dfrac{k}{2|\mathbf{K}|}\sqrt{\dfrac{g}{|\mathbf{K}|}}, c_{gy} = \dfrac{l}{2|\mathbf{K}|}\sqrt{\dfrac{g}{|\mathbf{K}|}}$ で、群速度ベクトルは

   $$\mathbf{c}_g = \frac{\mathbf{K}}{2|\mathbf{K}|}\sqrt{\frac{g}{|\mathbf{K}|}}$$

2. Chapter6. 粘性流体
   (a) 粘性流体の方程式

   $$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p - \nabla\phi + \nu\nabla^2\mathbf{v}$$

   (b) Reynolds の相似則：密度一定の (もしくは、$\rho = \rho(p)$ となる) 流体を考える。代表的な長さ L と速度 U で無次元化すると無次元の流速 $\mathbf{v}_*$ と (静水圧部分を除いた) 圧力関数 P_* に対して、運動方程式は

   $$\frac{D\mathbf{v}_*}{Dt_*} = -\nabla_* P_* + \frac{\nu}{UL}\nabla^2\mathbf{v}_*$$

   と書ける。この式は、無次元の境界条件が同じ時、$R_e = \dfrac{UL}{\nu}$ が同じであれば、実際のスケール U, L に依らず、同じ現象が生じることを意味する。R_e を Reynolds 数という。

   (c) 粘性流体のいくつかの解
   - 速度差を持つ平板管の流れ：Couette 流
   - 円管の中の流れ：Hagen-Poiseuille の流れ
   - 振動平板による流れ：　振動境界層が生じる

   (d) Reynolds 応力と渦粘性：流体中の乱れ (渦) による運動量の輸送・混合は、粘性と同じような役割をし、ある仮定のもとでは、分子粘性と同じ形に書ける。

第 8 回 (2019.06.11) の予定内容・要点

1. 前回の復習

   (a) 粘性流体の方程式
   $$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p - \nabla\phi + \nu\nabla^2\mathbf{v}$$

   (b) Reynolds の相似則：密度一定の (もしくは、$\rho = \rho(p)$ となる) 流体を考える。代表的な長さ L と速度 U で無次元化すると無次元の流速 $\mathbf{v}_*$ と (静水圧部分を除いた) 圧力関数 P_* に対して、運動方程式は
   $$\frac{D\mathbf{v}_*}{Dt_*} = -\nabla_* P_* + \frac{\nu}{UL}\nabla^2\mathbf{v}_*$$
   と書ける。この式は、無次元の境界条件が同じ時、$R_e = \dfrac{UL}{\nu}$ が同じであれば、実際のスケール U, L に依らず、同じ現象が生じることを意味する。R_e を Reynolds 数という。

   (c) 粘性流体のいくつかの解

   - 速度差を持つ平板間の流れ：Couette 流　$u(z) = \dfrac{U}{h}z$ 粘性運動量フラックスが一定。運動量は板から板へ。エネルギーは、運動する平板がした仕事が粘性で散逸。
   - 円管の中の流れ：Hagen-Poiseuille の流れ　$u(r) = \dfrac{\alpha}{4\nu}(a^2 - r^2)$
     工学的・医学的にも役立つ流れの基礎を与える。

2. Chapter6. 粘性流体の続き

   (a) 粘性流体のいくつかの解 (続)
   - 振動平板による流れ：　粘性による振動伝播。振動境界層の形成。

   (b) Reynolds 応力と渦粘性：流体中の乱れ (渦) による運動量の輸送・混合は、粘性と同じような役割をし、ある仮定のもとでは、分子粘性と同じ形に書ける。

3. Chapter7. 回転系での方程式

   (a) 回転系での運動方程式
   - $\mathbf{\Omega}$ で回転する長さ一定のベクトルの時間変化 $(D\mathbf{A}/Dt)$ を求める。
   - 座標軸の回転が、ベクトルの時間変化 $(D\mathbf{B}/Dt)$ にどう影響するか、から回転系での方程式が求まる。
   $$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} + 2\mathbf{\Omega}\times\mathbf{v} + \mathbf{\Omega}\times\mathbf{\Omega}\times\mathbf{r} = -\frac{1}{\rho}\nabla p - \nabla\phi + \nu\nabla^2\mathbf{v}$$

   (b) 遠心力とジオイド：回転する世界での水平面は静止系の水平面とは異なる。(回転する世界は全体が渦であり、回転の遅い部分が高気圧性渦)

   (c) コリオリ力と慣性振動：ジオイド面上での運動と力。 慣性振動は中心力場での運動である。

   (d) 球面極座標と局所直交直線座標系：式で扱いやすくするために局所直角座標を導入。水平面内での運動が卓越するため、系の回転は鉛直成分のみを取る。

   (e) β効果と絶対渦度の保存：回転軸の向きを変えても、トルクを与えなければ回転は変化しない。

第 9 回 (2019.06.18) の予定内容・要点

1. 前回の復習

   (a) 粘性流体のいくつかの解 (続)

   - 振動平板による流れ：　流入する正味の運動量がゼロなので、振動の影響は平板近くに捕らわれ、振動境界層を形成。振動境界層内では、粘性による位相伝播が見られる。

   (b) Reynolds 応力と渦粘性：

   - $-\rho\overline{u'v'}$ のような項は Raynolds 応力と呼ばれる。$\overline{u'v'} > 0$ であれば、x 方向の運動量の y 方向への輸送、もしくは、y 方向の運動量の x 方向への輸送がなされていると考えることが出来る。
   - 流体中の乱れ (渦) による運動量の輸送・混合は、分子粘性と同じような役割をし、ある仮定のもとでは、分子粘性と同じ形に書ける。これを渦粘性という。

2. 回転系での方程式

   (a) 回転系での運動方程式:

   - $\mathbf{\Omega}$ で回転する長さ一定のベクトルの時間変化 ($D\mathbf{A}/Dt$) を求める。
   - 上のベクトル $\mathbf{A}$ を回転座標の基底ベクトルと考えることにより、座標軸の回転が、ベクトルの時間変化 ($D\mathbf{B}/Dt$) にどう影響するか、から回転系での方程式が求まる。

   $$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} + 2\mathbf{\Omega} \times \mathbf{v} + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r} = -\frac{1}{\rho}\nabla p - \nabla\phi + \nu\nabla^2\mathbf{v}$$

   (b) 遠心力とジオイド：遠心力はポテンシャル力であり、重力の中に含まれる。回転する系での遠心力の存在は、回転系での重力と非回転系から見た時の重力 (万有引力) のずれを作る。それ故、回転する世界での水平面 (ジオイド) は静止系の水平面とは異なる。渦運動は必ず向心力を必要とするが、回転する世界は全体が渦であるため、系の回転に比べて回転の遅い部分が高気圧性渦となる。

   (c) コリオリ力と慣性振動：コリオリ力は運動する物体に働く力である。コリオリ力のみを取り出すにはジオイド面上での運動を考える必要がある。ジオイド面上での自由運動が慣性振動である。換言すると、慣性振動は中心からの距離に比例する中心力場での自由運動を、中心力と釣り合う遠心力を有する回転系から見たものである。

   (d) 球面極座標と局所直交直線座標系：式で扱いやすくするために局所直角座標を導入。水平面内での運動が卓越するため、系の回転は鉛直成分のみを取る。

   (e) β効果と絶対渦度の保存：回転軸の向きを変えても、トルクを与えなければ回転は変化しない。それ故、流体が北 (南) に移動すると、系の回転の鉛直成分の変化に伴い、回転系からは負 (正) の回転が生じたように見える。

第 10 回 (2019.06.25) の予定内容・要点

1. 前回の復習
   (a) 回転系での方程式
   - 回転系での運動方程式:
   $$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} + 2\mathbf{\Omega}\times\mathbf{v} + \mathbf{\Omega}\times\mathbf{\Omega}\times\mathbf{r} = -\frac{1}{\rho}\nabla p - \nabla\phi + \nu\nabla^2\mathbf{v}$$
   - 遠心力とジオイド：遠心力はポテンシャル力であり、重力の中に含まれる。回転する世界での水平面 (ジオイド) は静止系の水平面とは異なる。渦運動は必ず向心力を必要とするが、回転する世界は全体が渦であるため、系の回転に比べて回転の遅い部分が高気圧性渦となる。
   - コリオリ力と慣性振動：コリオリ力は運動する物体に働く力である。コリオリ力のみを取り出すにはジオイド面上での運動を考える必要がある。ジオイド面上での自由運動が慣性振動である。換言すると、慣性振動は中心からの距離に比例する中心力場での自由運動を、中心力と釣り合う遠心力を有する回転系から見たものである。

2. Chapter7 回転系での方程式 (続き)
   (a) 球面極座標と局所直交直線座標系：式で扱いやすくするために局所直角座標を導入。水平面内での運動が卓越するため、系の回転は鉛直成分のみを取る。
   (b) β効果と絶対渦度の保存：回転軸の向きを変えても、トルクを与えなければ回転は変化しない。それ故、流体が北 (南) に移動すると、系の回転の鉛直成分の変化に伴い、回転系からは負 (正) の回転が生じたように見える。

3. Chapter8 回転系での浅水波と地衡流
   (a) 回転系での浅水方程式と浅水波の式: 回転系では、浅水重力波に回転効果が加わるとともに空間的に η が分布する定常解 (地衡流の解) が現れる。
   (b) 慣性重力波：
   $$\sigma^2 = gH|\mathbf{K}|^2 + f^2, \quad c = \pm\sqrt{gH + f^2|\mathbf{K}|^{-2}}, \quad \mathbf{c}_g = \frac{gH}{\sigma}\mathbf{K}$$
   流体粒子は楕円軌道を描く。長波極限で慣性振動。それ以上長周期の波は存在しない。波数ゼロ極限で配送速度は無限大で、群速度はゼロになる。自転の影響により圧力の高い方を (北半球では) 左に見る流れが生じる。圧力傾度力の向きとコリオリ力の向きが鋭角をなすため、復元力が強まり、非回転系よりも周波数は大。
   (c) ケルヴィン波:　一方向の成分が地衡流平衡にあり、それと直交する方向に伝播する波。振幅が無限大にならない条件は、陸岸境界の存在により満足される。ロスビーの変形半径で、沖向きに振幅が減少する。
   一方向が地衡流バランスになると、その方向の流速がなくなるため、それと直交する方向に伝播する波は非回転系と同じになる。
   (d) 地衡流：
      i. ロスビー数やエクマン数が小さい時、慣性周期よりも長い時間スケールの変動は、ほぼ地衡流平衡になる。地衡流は、地衡流平衡からの微小なズレによって、時間発展する。
      ii. f, ρ が水平方向に一定であるとみなすことが出来れば、地衡流流線関数が導入できる。

第 11 回 (2019.07.02) の予定内容・要点

1. 前回の復習
   (a) 球面極座標と局所直交直線座標系：式で扱いやすくするために局所直角座標を導入。水平面内での運動が卓越するため、系の回転は鉛直成分のみを取る。
   (b) β効果と絶対渦度の保存：回転軸の向きを変えても、トルクを与えなければ回転は変化しない。それ故、流体が北 (南) に移動すると、系の回転の鉛直成分の変化に伴い、回転系からは負 (正) の回転が生じたように見える。
   (c) 回転系での浅水方程式と浅水波の式: 回転系では、浅水重力波に回転効果が加わるとともに空間的に η が分布する定常解 (地衡流の解) が現れる。
   (d) 慣性重力波：
   $$\sigma^2 = gH|\mathbf{K}|^2 + f^2, \quad c = \pm\sqrt{gH + f^2|\mathbf{K}|^{-2}}, \quad \mathbf{c}_g = \frac{gH}{\sigma}\mathbf{K}$$
   流体粒子は楕円軌道を描く。長波極限で慣性振動。それ以上長周期の波は存在しない。波数ゼロ極限で配送速度は無限大で、群速度はゼロになる。自転の影響により圧力の高い方を (北半球では) 左に見る流れが生じる。圧力傾度力の向きとコリオリ力の向きが鋭角をなすため、復元力が強まり、非回転系よりも周波数は大。

2. Chapter8 回転系での浅水波と地衡流 (続き)
   (a) ケルヴィン波:　一方向の成分が地衡流平衡にあり、それと直交する方向に伝播する波。振幅が無限大にならない条件は、陸岸境界の存在により満足される。$f > 0$(北半球) であれば、岸を右に見る方向に伝播する。ロスビーの変形半径のスケールで沖向きに振幅が減少する。
      - ロスビーの変形半径：$\sqrt{gH}/|f|$ =「$1/f$ 時間で重力波が進む距離」=「地球自転効果が重要となり、地衡流平衡になるまでに重力波が進む距離」と考えることが出来る。
   (b) 地衡流：
      i. ロスビー数やエクマン数が小さい時、慣性周期よりも長い時間スケールの変動は、ほぼ地衡流平衡になる。地衡流は、地衡流平衡からの微小なズレによって、時間発展する。
      ii. f, ρ が水平方向に一定であるとみなすことが出来れば、地衡流流線関数が導入できる。
      iii. 密度が一定の場合で地衡流平衡が成り立っているとき、流れは回転軸方向に一定になる。(テーラー・プラウドマンの定理)
      iv. 地衡流は圧力の水平勾配により与えられる。圧力の鉛直変化は、密度により与えられる。よって、地衡流の鉛直変化は水平密度勾配によって決まる。これを温度風平衡と言う。

3. Chapter9 エクマン境界層
   (a) 上空で地衡流平衡になる流れ場を考え、さらに粘性を加え、地表 (底) で流速がゼロになるとした時、解はどうなるかという問題。
   密度一様な場合、地衡流は鉛直シアを持たない。このことは粘性項 $\nu\partial^2\mathbf{u}/\partial z^2$ があっても地衡流は解という事である。これが、地表 (底) での境界条件 ($\mathbf{u} = 0$) を満足するために生じる境界層をエクマン層という。
   (b) エクマンスパイラル：地表近くでは、流速が小さくなり、圧力傾度力の方向の流速成分が現れ、流向が回転的になる。これをエクマンスパイラルという。(エクマン層の方程式は、6.3.3 振動平板による流れと同じである)。
   (c) 海面でのエクマン層：海面に風が吹いた場合、海面にエクマン層が生じる。
   (d) エクマン輸送：エクマン層内の流れの地衡流との差の鉛直積分をエクマン輸送という。エクマン輸送ベクトルは、境界から流体に与えられる応力に対して (北半球では) 直角右向きになる。これは、エクマン輸送に働くコリオリ力と境界からの応力の釣り合いから当然である。
   (e) エクマンパンピング：エクマン輸送に水平収束はエクマン層上端での鉛直流を表す。これをエクマンパンピングという。底面からのエクマンパンピング速度は、地衡流の渦度に比例する。

第 12 回 (2019.07.09) の予定内容・要点

1. 前回の復習

   (a) ケルヴィン波: 一方向の成分が地衡流平衡にあり、それと直交する方向に伝播する波。振幅が無限大にならない条件は、陸岸境界の存在により満足される。ロスビーの変形半径のスケールで沖向きに振幅が減少する。
   一方向が地衡流バランスになると、その方向の流速がなくなるため、それと直交する方向に伝播する波は非回転系と同じになる。$y=0$ に陸があり、$y>0$ が海であるとする。y 方向の流速をゼロとすると、
   $$\frac{\partial u}{\partial t} = -g\frac{\partial \eta}{\partial x}, \quad fu = -g\frac{\partial \eta}{\partial y}, \quad \frac{\partial \eta}{\partial t} = -H\frac{\partial u}{\partial x}.$$
   ここで、$u = u_0 e^{ik(x-ct)}e^{-\alpha y}, \eta = \eta_0 e^{ik(x-ct)}e^{-\alpha y}$ を考えると、$u_0 = c\eta_0/H, c = \pm\sqrt{gH}, \alpha = fc/gH$ を得る。$y\to\infty$ で u,η が有限でなければいけないので、$\alpha>0$。よって、北半球 $(f>0)$ では $c>0$、すなわち、$c=\sqrt{gH}$ で岸を見て進む。南半球では逆になる。$\alpha^{-1} = \sqrt{gH}/|f|$ をロスビーの変形半径という。

   (b) ロスビーの変形半径：$\sqrt{gH}/|f|$ =「$1/f$ 時間で重力波が進む距離」=「地球自転効果が重要となり、地衡流平衡になるまでに重力波が進む距離」と考えることが出来る。

   (c) 地衡流：ロスビー数やエクマン数が小さい時、慣性周期よりも長い時間スケールの変動は、ほぼ地衡流平衡になる。地衡流は、地衡流平衡からの微小なズレによって、時間発展する。

   (d) f, ρ が水平方向に変化しないとみなすことが出来れば、地衡流流線関数が導入できる。

   (e) 密度が一定の場合で地衡流平衡が成り立っているとき、流れは回転軸方向に一様になる。(テーラー・プラウドマンの定理)

   (f) 温度風平衡：地衡流は圧力の水平勾配により与えられる。圧力の鉛直変化は、密度により与えられる。よって、地衡流の鉛直変化は水平密度勾配によって決まる。

2. エクマン境界層

   (a) エクマン層：上空に地衡流があり、地表で粘着条件が成立する場合、地表近くでは、流速が小さくなり、圧力傾度力の方向の流速成分が現れ、流向が回転的になる。これをエクマンスパイラルという。(エクマン層の方程式は、6.3.3 振動平板による流れと同じである)。

   (b) 海面でのエクマン層：海面に風が吹いた場合、海面にエクマン層が生じる。

   (c) エクマン輸送：エクマン層内の流れの地衡流との差の鉛直積分をエクマン輸送という。エクマン輸送ベクトルは、境界から流体に与えられる応力に対して (北半球では) 直角右向きになる。これは、エクマン輸送に働くコリオリ力と境界からの応力の釣り合いから当然である。

   (d) エクマンパンピング：エクマン輸送の水平収束はエクマン層上端での鉛直流を表す。これをエクマンパンピングという。底面からのエクマンパンピング速度は、その直上の地衡流の渦度に比例する。

   (e) スピンアップ、スピンダウン：地衡流には、鉛直方向の粘性による運動量輸送は重要にはならない (密度一様なら鉛直シアなし)。地衡流場の変化は、渦柱の伸縮、もしくは、内部領域における非地衡流に働くコリオリ力に依る。

3. 準地衡流渦度方程式

   (a) 準地衡流：§8.4.1 で述べたように、中緯度の長周期の流れはほぼ地衡流平衡にあり、その微小なズレにより変動する。それ故、流れを地衡流で近似し、それからの微小なズレで地衡流場の発展を記述する方程式が導くことが出来る。この時に行う操作を準地衡流近似という。

   (b) 1 層 f 平面：相対渦度の変化は渦柱の伸縮による。伸縮を引き起こすものは地形 (山、谷、傾斜) とエクマンパンピング。地形はポテンシャル渦度の保存で扱える。エクマンパンピングはポテンシャル渦度に対する強制・散逸の形で入ってくる。

第 13 回 (2017.07.16) の予定内容・要点

1. 前回の復習

   (a) エクマン層：上空に地衡流があり、地表で粘着条件が成立する場合、地表近くでは、流速が小さくなり、圧力傾度力の方向の流速成分が現れ、流向が回転的になる。これをエクマンスパイラルという。(エクマン層の方程式は、6.3.3 振動平板による流れと同じである)。

   (b) 海面でのエクマン層：海面に風が吹いた場合、海面にエクマン層が生じる。

   (c) エクマン輸送：エクマン層内の流れの地衡流との差の鉛直積分をエクマン輸送という。エクマン輸送ベクトルは、境界から流体に与えられる応力に対して (北半球では) 直角右向きになる。

   (d) エクマンパンピング：エクマン輸送の水平収束はエクマン層上端での鉛直流を表す。これをエクマンパンピングという。底面からのエクマンパンピング速度は、その直上の地衡流の渦度に比例する。

   (e) スピンアップ、スピンダウン：地衡流には、鉛直方向の粘性による運動量輸送は重要にはならない (密度一様なら鉛直シアなし)。地衡流場の変化は、渦柱の伸縮、もしくは、内部領域における非地衡流に働くコリオリ力に依る。

2. 準地衡流渦度方程式

   (a) 準地衡流近似：§8.4.1 で述べたように、中緯度の長周期の流れはほぼ地衡流平衡にあり、その微小なズレにより変動する。それ故、流れを地衡流で近似し、それからの微小なズレで地衡流場の発展を記述する方程式が導くことが出来る。層の厚さを含め、全て、地衡流流線で表される。

   (b) 1 層準地衡流渦度方程式： 1 層 β 平面のポテンシャル渦度は、相対渦度、表面変位 (渦柱の伸縮)、β 項、底地形で表現され、もし、(エクマンパンピング等による) 散逸がなければ、ポテンシャル渦度は、ラグランジュ的に保存する。

   (c) 成層の影響：今回は時間の都合で講義では扱わない。多層モデルの場合、基本的には、1 層と同じであり、違いは、層の境をなす境界面の高さの変位 η_I を (静止状態でのものを除いた) 上層と下層の圧力差と層間の密度差 (演習問題　問 5.1.1 参照) から求めるという点だけである。内部ロスビー波では、ロスビーの変形半径が $1/f$ 時間に内部重力波の伝播できる距離になるので、小さくなり、また、鉛直構造 (鉛直モード) によって異なるようになる (p.42.［参考 2］参照)。(配布テキストで自習して欲しい。なお、疑問があれば個別にお答えします)。

   (d) 2 層準地衡流渦度方程式：密度成層を 2 層で表現した場合、密度界面の変位は $\eta_I = \dfrac{f\Delta\rho}{\rho_0 g}(\psi_2 - \psi_1)$ と上層と下層の流線の差で表現される。強制や散逸がなければ、上層下層、それぞれのポテンシャル渦度が保存する。

3. ロスビー波

   (a) 1 層でのロスビー波：$\hat{\beta} = d\bar{Q}/dy =$ 一定として、渦位方程式を線形化する。

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\nabla_H^2\psi - \frac{1}{R^2}\psi\right] + \hat{\beta}\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0$$

   平面波の解 $\psi = Aexp\{i(kx + ly - \sigma t)\}$ を代入すると、

$$\sigma = -\frac{\hat{\beta}k}{k^2 + l^2 + R^{-2}},\ c_x = \frac{\sigma}{k} = -\frac{\hat{\beta}}{k^2 + l^2 + R^{-2}},\ c_{gx} = \frac{\partial \sigma}{\partial k} = \frac{\hat{\beta}[k^2 - l^2 - R^{-2}]}{(k^2 + l^2 + R^{-2})^2}$$

   位相は、場の渦位が大きい方を右に見て進む。$\hat{\beta}$ が惑星 β ならば西に伝播。群速度は長波は西に、短波は東に進む。

   (b) ロスビー波のメカニズム：惑星 β で考える。静止状態から、渦位を保存したまま流体のある部分が北に移動すると、その部分の相対渦度は負になる。負の渦度の周りには時計回りの流れが生じるので、北上した流体要素の西側の流体は北に運ばれる。それにより、初期に北に移動した流体の西側に負の循環が発生する。位相は西に伝播。

第 14 回ー最終回ー (2019.07.23) の予定内容・要点

1. 前回の復習

   (a) 順地衡流渦度方程式

      i. 準地衡流近似：§8.4.1 で述べたように、中緯度の長周期の流れはほぼ地衡流平衡にあり、その微小なズレにより変動する。それ故、流れを地衡流で近似し、それからの微小なズレで地衡流場の発展を記述する方程式が導くことが出来る。層の厚さを含め、全て、地衡流流線で表される。

      ii. 1 層準地衡流渦度方程式：1 層 β 平面のポテンシャル渦度は、相対渦度、表面変位 (渦柱の伸縮)、β 項、底地形で表現され、もし、(エクマンパンピング等による) 散逸がなければ、ポテンシャル渦度 $q = \nabla^2\psi - R^{-2}\psi + \beta y f\eta_b/H$ は、ラグランジュ的に保存する。

   (b) ロスビー波

      i. 線形化された 1 層順地衡流渦度方程式

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\nabla^2\psi - \frac{1}{R^2}\psi\right] + \hat{\beta}\frac{\partial\psi}{\partial x} = 0$$

      背景渦位 f/H が y 方向に増加している場合の式。背景渦位コンターを流体柱が横切ることにより、擾乱場の渦位が生成するという式。

      ii. 1 層モデルにおけるロスビー波の分散関係

$$\sigma = -\frac{\hat{\beta}k}{k^2+l^2+R^{-2}},\ c_x = \frac{\sigma}{k} = -\frac{\hat{\beta}}{k^2+l^2+R^{-2}},\ c_{gx} = \frac{\partial\sigma}{\partial k} = \frac{\hat{\beta}[k^2-l^2-R^{-2}]}{(k^2+l^2+R^{-2})^2}$$

      位相は、場の渦位が大きい方を右に見て進む。$\hat{\beta}$ が惑星 β ならば西に伝播。群速度は長波は西に、短波は東に進む。

      iii. ロスビー波のメカニズム：惑星 β で考える。渦位を保存したまま流体のある部分が北に移動すると、その部分の相対渦度は負になる。負の渦度の周りには時計回りの流れが生じるので、北上した流体要素の西側の流体は北に運ばれる。それにより、初期に北に移動した流体の西側に負の循環が発生する。位相は西に伝播。

2. 西方強化 (海洋の循環)

   (a) Stommel の解：β 平面で、底摩擦と海面風応力を考えた時の線形海洋循環の解。方程式は、

$$\beta\frac{\partial\psi}{\partial x} = -r\nabla^2\psi + \frac{f_0 w_e}{H_0}$$

   ここで、$r = f_0\delta_e/2H$ はエクマン摩擦の項。w_e は海面風応力によるエクマンパンピング。w_e が簡単な場合には、簡単に解ける。$\beta \neq 0$ なら、循環の中心は西に寄り、西岸に沿って強い流れが生じる。

   (b) Sverdrup 平衡と西岸境界流：r/β の幅の西岸に沿う強い流れが生じる。それを西岸境界流という。海洋のスケール L_x が、$r/beta$ より十分に大きい場合、方程式は、西岸から離れたところでは $\beta\psi_x = f_0 w_e/H_0$ となる (ここで、添字の x は微分を表す)。この関係を Sverdrup 平衡という。この式は、海面からのエクマンパンピングによる渦柱の伸縮に対して f/h が一定になるように流体柱が南北に移動することを意味する
   西岸すぐ近くだけを見ると、$\beta\psi_x = -r\psi_{xx}$ となる。南北に移動することによる相対渦度の発生をエクマン摩擦が抑えている形である。もう少し渦位力学的に言うと、相対渦度によって生じる底エクマン層からのエクマンパンピングによって、南北移動に伴う相対渦度の増加を抑えているということである。海面での w_e の総量と西岸境界層での底摩擦によるエクマンパンピングの総量は同じであり、それ故、定常に達することが出来る。

   (c) ロスビー波と西方強化：線形定常非粘性の準地衡流渦度方程式は、$\beta v = 0$ である。これは、β 面の定常流は東西流しか存在しないことを意味する。エクマン摩擦があるような状況でも、外洋に定常な南北流は存在できない。ロスビー波として西に伝播し、風応力のような強制がない場合には、西岸に押し付けられた形でのみ南北流は可能となる。