

# 地球流体力学特論 2021

by 久保川 厚

## 目次 (予定)

### A. 流体力学の基礎

1. はじめに
2. 流体の基礎方程式  
局所時間微分と Lagrange 微分、連続の式、運動方程式、非圧縮の仮定
3. Bernoulli の定理  
順圧流体の運動方程式、静止状態、定常状態、流線の曲率と圧力勾配
4. 渦、渦度、循環  
渦度と循環、循環定理・渦定理・ポテンシャル渦度、渦度方程式
5. 水の波  
浅水波、より一般的な場合の水の波
6. 粘性流体  
粘性流体の方程式、Reynolds の相似則、粘性流体のいくつかの解、Reynolds 応力と渦粘性

### B. 回転流体力学

7. 回転系での方程式  
回転系での方程式、遠心力とジオイド、コリオリ力と慣性振動、局所直交直線座標系
8. 回転系での浅水波と地衝流  
回転系での浅水波の式、慣性重力波、ケルビン波、地衝流
9. Ekman 境界層  
エクマンスパイラル、エクマン輸送・エクマンポンピング、スピンアップ・スピンドウンとポテンシャル渦度
10. 準地衝流渦度方程式  
準地衝流渦度方程式、底の傾斜と惑星  $\beta$ 、成層の影響
11. Rossby 波  
1 層でのロスビー波、成層流体中のロスビー波
12. 西方強化 (海洋循環)  
ストムメルの解、スベルドラップ流と西岸境界流

# Chapter 1

## はじめに

地球流体力学とは、自然界の流動現象を統一的扱おうとする学問。広い意味では、マンツルの流動等も含むが、狭義では、大気や海洋を中心とし、特に、大気海洋系で重要な役割をする地球自転効果と成層の効果を含む流体の力学を言う。

流体力学とは流体の運動を扱う学問。流体とは気体や液体のように流れるもの。我々の扱う流体は、大きなスケールを持ちゆっくりと流れるので、古典力学に従う。古典力学は、質点の力学、剛体の力学、連続体の力学に大別される。質点とは大きさはなく、一点に質量が集中したもの、剛体とは、大きさを持つが変形しないもの。連続体とは密度と速度等の物理量が連続的に分布し、また変化するもの。連続体は弾性体と流体に大別される。弾性体力学は地震学等固体地球物理の基礎、流体力学は流体地球物理学の基礎をなす。

流体として扱う空気や水は、実際には、分子の集合である。0°C、1気圧の空気は1cm<sup>3</sup>中に約 $2.7 \times 10^{19}$ 個の分子を含む。我々の感じる空気の動きは、これら多数の分子の動きの総体である。もし、分子1個ずつの運動を記述できれば、全体の動きも分かる。しかし、我々に認識可能な大きさを持つある体積中に十分な数の分子があれば、個々の分子の個性は重要ではなくなる。平均された巨視的な物理量は、巨視的な条件で決まるであろう。そのような考えの下、分子の集合である空気や液体を連続体として扱う。それ故、座標毎に流速であるとか密度であるとかの物理量が定義される。「場」を扱うので、変位に対して復元力が働けば、物自体はほとんど動かないにも関わらず、情報だけが伝わる波動も発生する。

気象学や海洋物理学では現象を物理学に基づいて解釈・予測する。物理学が我々に伝えるところは、単純な少数の原理が複雑なこの世界を形作るということである。流体の運動は複雑であり、大気海洋に様々現象を引き起こす。そのような多様な現象をそれぞれ記述するとすれば、それは膨大な情報となる。他方、そのような現象も元を辿れば、少数の

単純な原理に帰納できる。この授業は、それら単純な原理を理解すること、そして、それがどのように我々の身の回りの一見複雑な流体運動、特に、地球上の大規模な大気海洋現象を生み出していくかを考える。

物事を理解するというのは、物事を自分が分かる単純な要素からなる整合した世界で捉えるという事である。どの程度物理的に現象を理解できるかは、理解に用いられる単純な要素をどれだけ深く理解しているかに依存する。そのため、この授業では、ニュートン力学のみを既知として、流体および回転流体の力学に関する基本法則について考える。実際にやることは、ニュートンの運動の法則に従う運動方程式の導出から、その変形や結合と、たまに解を得ることであり、どこから出てきたのかわからないような式や概念は存在しない。特に難しい数学も必要とはしない。したがって、各自が全て、紙と鉛筆で話を追うことができる。ここの授業で目指すのは、情報や知識の獲得ではなく、流体世界の法則性の基礎を数理科学的に体得することである。

地球流体においては、密度成層の効果というのは非常に重要ではあるが、ほとんどの場合、参考として章末に簡単に記述するにとどめる。しかし、自転する地球上に住む我々にとっては、地球自転(回転)の効果は不可欠なので、それは扱う。授業は、「地球流体力学演習」とリンクして行われる。したがって、地球流体力学特論を履修する場合には、地球流体力学演習も履修すること。(他コースの学生もこの授業を取る場合には、単位にはならないが、地球流体力学演習も受けることをお勧めする。ただし受講者が多い場合にはご遠慮頂かざる得ない場合もある)。また、密度成層以外にも講義では触れないことは多々ある。そのような点に関しては以下の参考書等を参照されたし。なお、この授業では基礎的な数学と物理の知識を前提とする。それらに自信のない人は、例えば、「必答問題の解答例と解説」

[http://wwwoa.ees.hokudai.ac.jp/people/kubok/exam\\_comments/samples\\_and\\_comments.html](http://wwwoa.ees.hokudai.ac.jp/people/kubok/exam_comments/samples_and_comments.html)

も参考になるかもしれない。

### 参考書

流体力学、巽友正著、培風館

流体力学1、ランダウ=リフシッツ理論物理学教程、竹内均訳、東京図書

流体力学(前編)、今井功著、裳華房

流体力学、岩波全書、今井功著、岩波書店

地球流体力学入門、気象学のプロムナード13、木村竜治著、東京堂出版

流れの科学、木村竜治著、東海大学出版会

Geophysical Fluid Dynamics, 2nd Edition, J.Pedlosky 著、Springer-Verlag

Lecture on Geophysical Fluid Dynamics, Rick Salmon 著、Oxford Univ. Press.

Introduction to Geophysical Fluid Dynamics, B. Cushman-Roisin 著、Prentice-Hall.

Atmospheric and Oceanic Fluid Dynamics, G.K. Vallis 著、Cambridge Univ. Press.

# Chapter 2

## 流体の基礎方程式 (完全流体)

### 2.1 局所時間微分と Lagrange 微分

流体の運動もニュートンの力学に従う。ニュートン力学の通常の扱いでは質点の運動 (位置、速度、加速度) を記述する。流体においても、流体を微粒子 (流体粒子と呼ぶ) の集合と考え、各々の流体粒子の運動を考えるというのは可能である。このようにして流体の運動を記述する方法を Lagrange 式記述という。これは、質点の力学の延長という意味からは理解しやすいが、流速等の物理量は流体粒子毎に定義されるので、その分布を記述するためには、互いに力を及ぼし合う無限個の流体粒子それぞれの位置を常に把握しておかねばならない。これはそう簡単なことではない。他方、我々が流れを知りたい場合、空間に固定されたある点に風速計や流速計を置いて計測することが多い。この場合には、流体粒子そのものはどんどん入れ替わっていく中で、流速 (やその他の物理量) を場所と時間の関数として記述することになる。このような記述法を Euler 式記述という。空間は流体に満ちているので、後者の扱いの方が簡便である。しかし、Newton の運動方程式は前者の視点で作られている。そこでまず両者の関係を見てみる。

流体中に固定された座標系を考える。Euler 式記述においては、この空間の中の位置  $r$ 、時刻  $t$  での密度  $\rho$  と速度  $v$  はその点ごとに  $(r, t)$  の関数として与えられることになる。他方、Lagrange 式記述においては、ある位置  $r$  に存在する流体は時間をかけて何処かから流れてきたと考える。時刻  $t$  で位置  $r$  に存在する流体が、 $t = 0$  で  $r_0$  にあったとすると、 $r$  は、例えば、

$$r = r(t, r_0), \quad (2.1)$$

と書ける。すなわち、流体粒子の位置は、時刻と  $t = 0$  での流体粒子の座標の関数になる。換言すれば、流体粒子には、すべて、初期位置での座標という“名前”がついているということである。この場合、温度とかの物理量も、 $r_0$  とする名前のついた流体粒子毎にど

のように変化していくかというふうに見る。そして、ある物理量  $\lambda(\mathbf{r}, t)$  の時間微分というのは、初期位置  $\mathbf{r}_0$  を固定しての微分になる。空間 ( $\mathbf{r}$ ) を固定しての微分と区別するため、 $D/Dt$  もしくは全微分を表す  $d/dt$  が用いられる:

$$\left(\frac{\partial\lambda}{\partial t}\right)_{\mathbf{r}_0} = \frac{D}{Dt}\lambda. \quad (2.2)$$

これを Lagrange 微分 (物質微分) という。他方、 $\mathbf{r}$  固定、すなわち、ある特定の場所で観察したときにどのように変化するかという場合には、通常の偏微分記号を用いて、

$$\left(\frac{\partial\lambda}{\partial t}\right)_{\mathbf{r}} = \frac{\partial}{\partial t}\lambda, \quad (2.3)$$

と書く。これを局所時間微分 (Euler 式の時間微分) という。

速度  $\mathbf{v}$  と加速度  $\mathbf{a}$  は流体粒子の位置の時間変化率と、その速度の時間変化率により記述できる。すなわち、流体粒子を識別する  $\mathbf{r}_0$  を固定しての時間による微分:

$$\mathbf{v} = \frac{D}{Dt}\mathbf{r}, \quad \mathbf{a} = \frac{D}{Dt}\mathbf{v} \quad (2.4)$$

である。

(2.2) と (2.3) の関係を調べる。 $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\mathbf{r}_0, t)$  であることを考慮すると、 $\lambda$  の Lagrange 微分は、

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt}\lambda &= \left(\frac{\partial\lambda}{\partial t}\right)_{\mathbf{r}} + \left(\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial t}\right)_{\mathbf{r}_0} \cdot \nabla\lambda \\ &= \frac{\partial\lambda}{\partial t} + \frac{D\mathbf{r}}{Dt} \cdot \nabla\lambda \\ &= \frac{\partial\lambda}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla\lambda. \end{aligned} \quad (2.5)$$

と、局所微分によって書き直せる。 $\mathbf{v} \cdot \nabla$  はデカルト座標系 (= 直交直線座標系) では、

$$\mathbf{v} \cdot \nabla = u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z} \quad (2.6)$$

である。すなわち、 $\mathbf{v} \cdot \nabla$  は  $\mathbf{v}$  と  $\nabla$  の内積の形になる。流体粒子毎にある物理量  $\lambda$  が変化しないとして、 $D\lambda/Dt = 0$  という式を考えると、 $\partial\lambda/\partial t + \mathbf{v} \cdot \nabla\lambda = 0$  なので、局所的な時間変化は  $\partial\lambda/\partial t = -\mathbf{v} \cdot \nabla\lambda$ 。この式は、 $\lambda$  が空間分布を持つとき、 $\mathbf{v}$  によってそれが流されることによって局所的な変化が決まることを意味する。それ故、 $\mathbf{v} \cdot \nabla\lambda$  の項を移流項 (advection term) という。

---

ラグランジュ微分の意味をもう少し考えてみよう。(2.5) をデカルト座標系で書くと、左

辺は  $\lambda(x(t), y(t), z(t), t)$  の  $t$  による微分なので

$$\begin{aligned}\frac{D\lambda}{Dt} &= \frac{\partial\lambda}{\partial t} + \frac{Dx}{Dt} \frac{\partial\lambda}{\partial x} + \frac{Dy}{Dt} \frac{\partial\lambda}{\partial y} + \frac{Dz}{Dt} \frac{\partial\lambda}{\partial z} \\ &= \frac{\partial\lambda}{\partial t} + u \frac{\partial\lambda}{\partial x} + v \frac{\partial\lambda}{\partial y} + w \frac{\partial\lambda}{\partial z}\end{aligned}$$

となる。一例として、 $D\lambda/Dt = 0$  で、かつ、 $v = w = 0$  のときは、

$$\frac{\partial\lambda}{\partial t} + u \frac{\partial\lambda}{\partial x} = 0$$

である。これは、 $\lambda$  が  $u$  で単純に流されるということなので、その解は時刻  $t = 0$  での  $\lambda(=\lambda(x, 0))$  が与えられているときには、時刻  $t = 0$  で  $x(0)$  にあった流体粒子の時刻  $t$  での位置が  $x(t)$  ならば、

$$\lambda(x(t), t) = \lambda(x(0), 0)$$

と書ける。 $x$  は  $Dx/Dt = u(x, t)$  なので

$$x(t) = x(0) + \int_0^t u(x(t), t) dt$$

と書ける。すなわち、 $x(0) = x(t) - \int_0^t u(x(t), t) dt$  なので、

$$\lambda(x(t), t) = \lambda(x(0), 0) = \lambda\left(x(t) - \int_0^t u(x(t), t) dt, 0\right)$$

となる。 $u$  が定数であれば、

$$\lambda(x, t) = \lambda(x - ut, 0)$$

である。 $t$  時間で  $ut$  流されるので、時刻  $t$ 、場所  $x$  での  $\lambda$  は、距離  $ut$  だけ遡った点の時刻  $t = 0$  の  $\lambda$  と同じという意味である。

局所時間微分  $\partial/\partial t$  がゼロの場合には、場は時間的に変化しない。この状態を定常という。当然であるが、 $D/Dt \neq 0$  でも、 $\partial/\partial t = 0$  の場合もある。

速度、加速度、渦度、磁場等のベクトル量に関しても同じ表式が使える。ベクトル量  $A$  を考えると

$$\frac{DA}{Dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla A. \quad (2.7)$$

デカルト座標系なら、ベクトルの各成分はスカラー量と同じように (2.5) 式に従う。しかし、ここで注意すべき点は、一般の直交曲線座標系では、座標に相対的なベクトルの向きが場所の関数であるため、 $\mathbf{v} \cdot \nabla$  をベクトルの各成分に作用する単純なスカラー演算子と

は見なせないということである。ベクトル  $\mathbf{A}$  を  $(A_1, A_2, A_3)$ 、各座標の向きの単位ベクトルを  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  としたとき、 $\mathbf{A} = \sum_{i=1}^3 A_i \mathbf{e}_i$  と書ける。したがって、

$$\frac{D\mathbf{A}}{Dt} = \sum_{i=1}^3 \frac{DA_i \mathbf{e}_i}{Dt} = \sum_{i=1}^3 \left\{ \mathbf{e}_i \frac{\partial A_i}{\partial t} + \mathbf{e}_i (\mathbf{v} \cdot \nabla) A_i + A_i (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{e}_i \right\} \quad (2.8)$$

となり、一般には、各成分は (2.5) には従わない。ベクトルに関しては単純に (2.7) のように書けるにも関わらず、成分表示すると他の項が付くということで、注意が必要である。なお、(2.7) は

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \mathbf{A} &= \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \frac{1}{2} \{ \nabla (\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}) + (\nabla \times \mathbf{v}) \times \mathbf{A} + (\nabla \times \mathbf{A}) \times \mathbf{v} \\ &\quad - \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{A}) + \mathbf{v} (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \mathbf{A} (\nabla \cdot \mathbf{v}) \} \end{aligned} \quad (2.9)$$

のように変形することもできる。

問題 2.1.1:  $x$  方向に伸びるパイプの中を流れるお湯の温度の分布を考える。パイプを流れるお湯の温度を  $T$  とする。外気温  $T_a$  と  $T$  の差に比例してお湯は冷えていく (熱を奪われる) とすると、方程式は

$$\frac{DT}{Dt} = -\gamma(T - T_a)$$

と書ける。ここで、 $\gamma$  は定数。 $x = 0$  でのお湯の温度を  $T_0$ 、お湯の流れる速さを  $U$  とした時の定常状態での温度分布  $T(x)$  を求めよ。なお、 $T_0, T_a, U$  は一定であるとする。

問題 2.1.2: ある時刻  $t = t_0$  で、水平方向の気温分布を調べると  $T = \alpha x + T_0$  という分布をしていた。 $x$  方向に風速  $U$  の風が吹いていた。ここで、 $x$  は水平の座標、 $\alpha, T_0, U$  は時空間的に一定であるとする。

(a) 空気は加熱も冷却もされないとすると、気温は時間とともにどのように変化するか? 地点  $x$  の時刻  $t$  での気温を求めよ。

(b) 良く晴れた日で、気温が全体的に毎秒  $\beta$  °C 上昇したとする。気温は時間とともにどのように変化するか? 地点  $x$  の時刻  $t$  での気温を求めよ。

問題 2.1.3:  $\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{A}$  を円筒座標の成分に分けて書いてみよ。

問題 2.1.4: デカルト座標で、(2.9) 式を考えると、各成分は、(2.5) に従うことを示せ。

## 2.2 連続の式

連続的に物質が存在するということは、その運動に対して制約を与える。そこで、流体内部における質量保存を考える。

空間中に固定された体積  $V$  の領域における質量の変化は、その体積  $V$  の領域の表面  $S$  から入ってくる質量に等しい。したがって、

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV = - \int_S \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS \quad (2.10)$$

ここで、 $\mathbf{n}$  は  $V$  の表面  $S$  に直交外向きの単位ベクトル。ガウス (Gauss) の発散定理を用いて、

$$\int_S \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS = \int_V \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) dV . \quad (2.11)$$

(2.10) の左辺は体積  $V$  が一定なので、

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV . \quad (2.12)$$

したがって

$$\int_V \left\{ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \right\} dV = 0 . \quad (2.13)$$

閉曲面  $S$  は任意に取れるので、

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 . \quad (2.14)$$

これが連続の式である。この式は、密度の局所時間変化は質量フラックス ( $\rho \mathbf{v}$ ) の収束 ( $-\nabla \cdot (\rho \mathbf{v})$ ) によることを意味する。

(2.14) を Lagrange 微分を用いて書き直すと  $\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = \rho \nabla \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho$  なので、

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (2.15)$$

となる。この表式はある流体粒子の密度の変化率は流体の収束発散 (流体素片の体積変化) によって決まることを意味する。

---

(2.14) と (2.15) の違いは、箱を固定するか、質量を固定するかの違いである。大きさ一定の箱の中の物質の質量は、箱に入ってくる物質の量と出ていく物質の量の差である。箱の大きさが固定されている場合、密度は質量割る箱の体積。質量フラックス ( $\rho \mathbf{v}$ ) の収束 ( $-\nabla \cdot (\rho \mathbf{v})$ ) は箱に入ってくるものから出ていくものを引いたものになっている。



他方、質量を固定する場合は、体積  $V$  の質量は (その中での密度が一定なら)  $V\rho$  である。これが一定なら体積が増えれば、 $\rho$  は減る。質量一定なら  $D(\rho V)/Dt = 0$  である。したがって、

$$\frac{D\rho V}{Dt} = \rho \frac{DV}{Dt} + V \frac{D\rho}{Dt} = 0$$

これより、

$$\frac{1}{V} \frac{DV}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} = \nabla \cdot \boldsymbol{v}$$

要するに、速度の発散は体積の変化率である。速度は流体粒子を動かすので、箱の大きさを変えるわけである。

---

問題 2.2.1 (ベクトルに不馴れな人向けの問題): 空間に固定されたデカルト座標系を考え、その中に辺の長さが  $(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$  であるような直方体を考え、その直方体内の質量保存から、(2.14) を導出せよ。

問題 2.2.2: 流体とともに動く閉曲面  $\delta S$  で囲まれた微小体積  $\delta V$  の流体素片を考える。この体積の時間変化から、連続の式 (2.15) を導出せよ。この場合、微小体積  $\delta V$  の流体素片の質量 ( $\rho\delta V$ ) は保存する。(体積の変化と  $\nabla \cdot \boldsymbol{v}$  の関係を求め、それと、 $D(\rho\delta V)/Dt = 0$  を組み合わせる。)

問題 2.2.3: 時間的に一定の流速  $\boldsymbol{v} = (ax, by, 0)$  が与えられていたとする。

(a) この流れの場を図示せよ。

(b)  $t = 0$  で密度  $\rho$  は空間的に一定 ( $= \rho_0$ ) であったとする。 $\rho$  の時間発展を求めよ。

## 2.3 運動方程式

流体に働く力は

1. 体積力：流体要素に直接働く力 (重力等)
2. 面積力：流体要素の間で互いに及ぼし合う力 (圧力、粘性力)

の2種類がある。

体積力の場合、単位質量に働く力を  $\mathbf{K}$  とすると、体積  $V$  の流体素片に働く力は

$$\mathbf{F} = \int_V \rho \mathbf{K} dV \quad (2.16)$$

と書ける。他方、面積力の場合には、例えば、右から押す力の方が左から押す力よりも大きければ、正味の力は左向きに働くという風に、その差で表現されるが、その差を取るという行為は、面に働く力をその流体素片の表面で積分することと同じである。したがって、単位広さの面に働く力を  $p$  とすると、その流体素片に働く正味の力は

$$\mathbf{F} = \int_S p d\mathbf{S} \quad (2.17)$$

と書ける。単位面積に働く面積力を応力という。面積力には、面に垂直に働く圧力と接する方向に働く粘性力がある。ここでは、粘性力は無視する (それについては、§6 で述べる)。粘性を無視した流体を「完全流体」とか「理想流体」とかという。圧力は、常に面に対して直交する方向に働くので、閉曲面  $S$  に垂直外向きの単位ベクトルを  $\mathbf{n}$  とすると、

$$d\mathbf{F} = -p \mathbf{n} dS \quad (2.18)$$

と書ける。(2.17) の面積分を体積分に書き直すと

$$-\int_S p \mathbf{n} dS = -\int_V \nabla p dV . \quad (2.19)$$

流体素片に働く力が分かったので、次に、Newton の運動の第2法則「運動量の変化は加えられる力に等しい」を流体に適用する。

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho \mathbf{v} dV = \int_V (\rho \mathbf{K} - \nabla p) dV . \quad (2.20)$$

体積  $V$  が十分に小さく、その内部で  $\rho$ 、 $\mathbf{v}$ 、 $\nabla p$  が一定と見なせるような微小な流体素片を考える。そうすると、(2.20) は

$$\frac{D}{Dt} (V \rho \mathbf{v}) = V (\rho \mathbf{K} - \nabla p) \quad (2.21)$$

と書ける。質量保存より、 $D(V\rho)/Dt = 0$ であるから、結局

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \mathbf{K} \quad (2.22)$$

を得る。これをオイラーの運動方程式と言う。

(2.22)の左辺を局所時間微分と移流に分けると

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{K} \quad (2.23)$$

となり、左辺第2項に従属変数である $v$ の積が現れる。これは、ある点での $v$ の変化には $v$ による、 $v$ 自身の移流が影響することを意味する。この項は同様に移流項、もしくは、 $v$ と $v$ の積なので、非線形項と呼ばれ、流体の問題を難しくしている、また、面白くしている最大の要因である。例えば、(2.23)の左辺第2項が $v_0 \cdot \nabla v$ という形で $v_0$ が時間的に一定とすれば、時間的に変化しない基本流場 $v_0$ の下での $v$ の変化を追うことになり、 $p, \rho$ を与える連続の式等も線形であれば、解は基本場に規定されているので、時間的にその性質を大きく変えることはない。しかし、移流速度 $v_0$ が $v$ とともに変化する( $v_0 = v$ )ならば、基本場と思っていた場そのものが時間とともに変化し、解のその後の発展に影響する。すなわち、場そのものが時間的に変化するという極めて複雑な状況となり、予測不可能な世界を産み出すことにもなる。

なお、(2.9)を用いれば、(2.23)は

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla |\mathbf{v}|^2 + (\nabla \times \mathbf{v}) \times \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{K}, \quad (2.24)$$

と書くこともできる。流体の方程式の解の一般的な性質を調べることは上述の事情により困難であるが、このような式変形により、特定の条件下(例えば、 $\nabla \times \mathbf{v} = 0$ )での解の性質を調べることが可能となる (§3 参照)。

問題 2.3.1: (2.9)式を用いて、(2.23)から(2.24)を導出せよ。

問題 2.3.2: 流体によって満たされた長さ $L$ の水平に置かれたパイプを考える。初期にはパイプ内の流体は静止していたとする。 $t = 0$ でパイプの右端と左端での圧力差 $\Delta p$ を与えた。その後の流速の時間発展を求めよ。ただし、流体の密度は常に一定であり、パイプの断面内での流速は一様であると仮定する。

問題 2.3.3: 非線形項が解に与える影響の一端を見るために、(2.23)の右辺を無視した1次元の方程式、

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

を考える。ある時刻  $t = t_0$  では、 $u$  は  $u(x, t_0) = U_0 + u_0 \sin kx$  と表されたとする。ここで、 $U_0, u_0, k$  は場所によらない定数。

(a)  $U_0 \gg u_0$  を仮定して、 $u$  の  $t > t_0$  での解を求めよ。この時、この方程式は

$$\frac{\partial u}{\partial t} + U_0 \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

と近似できる。このように、非線形項の微小な変動成分の積 (非線形性) を無視することを線形化という。

(b)  $U_0$  と  $u_0$  の大きさが同程度とした場合には  $u$  はどのように変化するか。その場合、振幅が  $u$  の点は  $u$  の速度で移動する。そのことを元に  $u$  の分布が時間とともにどうなるか図を描いてみよ。非線形項がない場合 (a) と比較し、非線形項によって解の時間的な振る舞いが大きく変わることをこと実感せよ。

問題 2.3.4: 密度が変化せず一定 ( $\rho = \rho_0$ ) とした場合、運動エネルギー方程式は

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\rho_0}{2} |\mathbf{v}|^2 + \nabla \cdot \left\{ \left( \frac{\rho_0}{2} |\mathbf{v}|^2 + p \right) \mathbf{v} \right\} = \rho_0 \mathbf{v} \cdot \mathbf{K}$$

と書けることを示せ。また、この場合、 $\mathbf{K} = 0$  ならば、閉じた系での運動エネルギーは保存することを示せ。なお、ここでは、密度一定 (非圧縮) としたが、流体が圧縮性を持つ場合には、圧縮に伴う内部エネルギーの変化も考慮しなければいけない。

## 2.4 非圧縮の仮定

連続の式と運動方程式だけでは、5 変数に対して 4 つの式なので、方程式系は閉じない。これに、状態方程式、 $f(p, \rho, T) = 0$  (ここで、 $T$  は温度) と、熱力学方程式を用いて、 $p$  と  $\rho$  (と  $T$ ) の関係を求めねばならない。一般には、流体が圧縮される ( $\nabla \cdot \mathbf{v} < 0$ ) と密度も温度も圧力も増大する。圧力の増大は運動方程式の右辺の圧力項に跳ね返り、流体を加速・減速する。この加速・減速と収束発散が協調して生じる波が音波である。

さて、ここで考えるのはゆっくりとした大規模な運動である。気体であれ、液体であれ、圧縮性は存在するが、変動の速さのスケールが音速 (空気中では、340m/s (15°C)、水中では 1484m/s(20°C)) より十分に小さければ、流体は、流体の密度をあまり変えないように動く。そのため、

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (2.25)$$

が、良い近似となる (章末の「参考」を参照)。これを、非圧縮の連続の式という。この講義では、簡単のため、以下では主にこの式を (2.14) もしくは (2.15) の代りに用いる。

(2.25) を (2.15) に代入すると、

$$\frac{D\rho}{Dt} = 0, \quad (2.26)$$

となるが、ここで注意すべきことは、地球流体の場合、(2.25) が良い近似で成り立つからといって、必ずしも、(2.26) が成り立つと思てはいけないという点である。(2.25) は流体の運動に対する制約条件である。流れそのものの密度変化への寄与が無視できることを意味し、また、流体の膨張や収縮そのものが直接引き起こす流れも無視できることを意味する。他方、(2.26) は、密度がラグランジュ的不変量であることを主張する。しかし、密度は温度や圧力にも依存し、熱を加えれば軽くなる。重力の作用する場では、若干の密度の違いでも大きな浮力を産み出すことができる。流速の収束・発散が無視できる程度のゆっくりとした体積変化も、浮力という観点からは無視できるとは限らない。そのため、(2.26) は必ずしも成り立たないのである。

問題 2.4.1: 円筒座標系で円筒の中心へ向かって、 $v_r = -U r$  という流れがあったとする。

$z = 0$  は地面 (個体境界) であり、そこでの鉛直流  $w = 0$ 。また、密度は時間的空間的に一定であったとする ( $\rho = \rho_0 = \text{一定}$ )。ここで  $U$  は定数であり、流れの場は方位角に依らないとする。

(a)  $\partial w / \partial z$  を求めよ。ただし、円筒座標系での  $\nabla \cdot \mathbf{v}$  は

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r v_r + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

である。

(b) 高さ  $z = h_0$  での  $w$  を求めよ。

(c) 初期に高さ  $z = h_0$  にあった流体粒子の高さを時間の関数 ( $z = h(t)$ ) として求めよ。

(d) 初期に半径  $r = R_0$  にあった流体粒子の  $r$  座標を時間の関数 ( $r = R(t)$ ) として求めよ。

(e) 半径  $R(t)$  の底面と高さ  $h(t)$  からなる円筒の体積は時間によらないことを示せ。

問題 2.4.2: 2次元非発散流。 $z$  方向には変化がない ( $\partial/\partial z = 0$ ) とする。そうすると

(2.25) は

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

となる。このような流れを2次元非発散流という。

$$u = -\frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial\psi}{\partial x}$$

を満足する関数  $\psi$  を導入すると、2次元の連続の式は自動的に満足される。この  $\psi$  を流線関数という。流線関数の等値線は流線(流速ベクトルをつないで出来る線)である。なお、以下では流速の  $z$  成分 ( $w$ ) はないとする。

- (a)  $(u, v) = (x, -y)$  で表わされる流れが2次元非発散であることを確認し、さらに、 $\psi(x, y)$  と  $(u, v)$  ベクトルの分布を重ねて図示せよ。
- (b) 流れが流線関数  $\psi$  一定の線に沿うことを証明せよ。さらに、任意の2本の流線に挟まれた単位厚さ(単位  $z$  長当り)の流量は2本の流線値の差のみによることを示せ。

### 参考: 音速と非圧縮の仮定

例えば、 $p = p(\rho)$  とすれば、音速は  $c_s = \sqrt{dp/d\rho}$  と書ける。もし、我々の見たい現象のスケールが、速度  $U$ 、空間スケール  $L$ 、時間スケール  $T$ 、密度変化  $\Delta\rho$  であったとする(時間  $T$ 、長さ  $L$  での速度変化が  $U$  で密度変化が  $\Delta\rho$ )。そうすると

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} \simeq \frac{U}{T}, \quad \frac{1}{\rho}\nabla p = \frac{1}{\rho} \frac{dp}{d\rho} \nabla\rho \simeq \frac{c_s^2 \Delta\rho}{\rho_0 L}.$$

したがって、運動方程式(2.23)より、

$$U \simeq \frac{c_s^2 T \Delta\rho}{\rho_0 L}.$$

連続の式においては、 $\nabla \cdot \mathbf{v}$  の大きさを見たいので、

$$\mathbf{v} = U \mathbf{v}_*, \quad \nabla = \frac{1}{L} \nabla_*$$

と無次元化する。そうすると連続の式(2.15)より、

$$\nabla_* \cdot \mathbf{v}_* = \frac{L}{\rho U} \frac{D\rho}{Dt} \simeq \frac{L}{U} \frac{\Delta\rho}{\rho T} \simeq \left(\frac{L}{T}\right)^2 \frac{1}{c_s^2}$$

が得られる。よって、もし、 $U = L/T \ll c_s$  なら、 $|\nabla_* \cdot \mathbf{v}_*| \ll 1$  である。したがって、我々の見たい時間・空間スケール(=速度スケール)では圧縮性は無視できる。ただし、先に述べたように、これは、運動に対する制約条件としては、非圧縮と見なして良いという意味であって、必ずしも  $D\rho/Dt = 0$  と見なしてもいいという意味ではない。

なお、非圧縮を仮定した場合、音波の速度は無限大になり、方程式系の解から除去される。解の可能性の一つが消えたということは、方程式系がそれだけ簡単になったということである。

問題 2.4.3:  $p = p(\rho)$  を仮定して、線形化された 1 次元の運動方程式と連続の式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

から音速を求めよ。ここで、流体の密度はほぼ  $\rho_0$  であり、密度の変化は  $\rho_0$  に比べて十分に小さいと仮定した。

# Chapter 3

## Bernoulliの定理

流体の方程式の解は複雑である。しかし、適当な条件下では、簡便で実用的な定理がいくつか導ける。ここでは、その代表的なものを見てみる。

### 3.1 密度一定の流体の運動方程式

完全流体の運動方程式は

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2 + (\nabla \times \mathbf{v}) \times \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{K} \quad (3.1)$$

と書ける (2.24)。もし、 $\mathbf{K}$  が重力のような保存力であれば、ポテンシャルが導入できて、

$$\mathbf{K} = -\nabla \phi. \quad (3.2)$$

もし密度が一定 ( $\rho = \rho_0$ ) であれば、

$$\frac{1}{\rho} \nabla p = \nabla \frac{p}{\rho_0} \quad (3.3)$$

と書ける。したがって、(3.1) は

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \left( \frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2 + \frac{p}{\rho_0} + \phi \right) = -(\nabla \times \mathbf{v}) \times \mathbf{v} \quad (3.4)$$

となる。この形にすることにより次ページ以降に述べるような定理が導かれる。

問題 3.1.1:  $\rho$  が  $p$  のみの関数、 $\rho = \rho(p)$ 、の場合にも (3.4) は同じような形:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \left( \frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2 + P + \phi \right) = -(\nabla \times \mathbf{v}) \times \mathbf{v} \quad (3.5)$$

に書ける。ただし、 $P$  は圧力関数、 $P = \int (1/\rho) dp$ 、である。この事を示せ。



なお、 $\rho$  が  $p$  のみの関数というのは等密度面と等圧面が一致していることを意味するが、そのような状態を順圧的 ( barotropic ) といい、常にそのようになる流体を順圧流体という。密度一定の流体はもちろん順圧流体である。また、気体の場合、もし、ポテンシャル温度が一定なら順圧流体である。それに対して、等密度面と等圧面が一致していない場合を傾圧的 ( baroclinic ) という。この順圧的、傾圧的という言葉は、流体の性質だけでなく、流れの性質にも用いられる。例えば、等密度面と等圧面が一致した状態に保たれた流れを順圧流という。

### 3.2 静止状態

静止状態 ( $\mathbf{v} = 0$ ) ならば、

$$\nabla \left( \frac{p}{\rho_0} + \phi \right) = 0 . \quad (3.6)$$

したがって、

$$p = -\rho_0 \phi + \text{定数} . \quad (3.7)$$

すなわち、等圧面と等ポテンシャル面が一致する。なお、ここでは、密度一定として (3.4) を出したが、静止流体では、圧縮性があつたとしても、常に、等圧面、等ポテンシャル面、等密度面は一致する (演習問題 3.2.2)。

(3.7) で表される圧力を静水圧という。静水圧を  $\bar{p}$ 、それからのずれを  $p'$  とした時、保存力場での運動方程式 (3.4) は

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2 + (\nabla \times \mathbf{v}) \times \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p' \quad (3.8)$$

と書ける。この式からは重力 (外力) が消えており、このような場合には、流体には上下がなくなることが分かる。

問題 3.2.1: 風呂桶に 60cm の深さに水を張った。底での圧力を計算せよ。ただし、地表での大気圧を、100kPa とする。Pa=1 N/m<sup>2</sup> である。なお、1 hPa=1 ヘクトパスカルは 100Pa。

問題 3.2.2: 静止状態では、運動方程式は

$$0 = -\frac{1}{\rho} \nabla p - \nabla \phi$$

と書ける。密度は空間的に一様ではないとする。rotation を取ることにより、静止状態では等圧面と等密度面が一致することを示せ。さらにそれらと等ポテンシャル面が一致することを示せ。

問題 3.2.3:  $p = p(\rho)$  の場合について、(3.8) と同様の式を導出せよ。

### 3.3 定常状態

(3.4) 式は定常状態では、

$$\nabla \left( \frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2 + \frac{p}{\rho_0} + \phi \right) = -(\nabla \times \mathbf{v}) \times \mathbf{v} \quad (3.9)$$

と書ける。右辺はベクトルなので、そのベクトル  $-(\nabla \times \mathbf{v}) \times \mathbf{v}$  に直交する面内、すなわち、流速ベクトルと渦度ベクトル  $(\nabla \times \mathbf{v})$  によって張られる面内のみでの傾きを考えれば、 $\nabla(\frac{1}{2}|\mathbf{v}|^2 + P + \phi)$  はゼロになる。したがって、その面内では、

$$\frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2 + \frac{p}{\rho_0} + \phi = \text{一定} \quad (3.10)$$

である。これを Bernoulli (ベルヌーイ) の定理という。また、流速ベクトルと渦度ベクトル  $(\nabla \times \mathbf{v}$ : 後述) によって張られる面を Bernoulli 面、(3.10) の左辺を Bernoulli 関数という。Bernoulli 関数の値は、Bernoulli 面毎に異なる。なお、流速ベクトルをつないで出来る線を流線、渦度ベクトルをつないで出来る線を渦線 (渦線に関しては後述) というので、上のことは、 $\frac{1}{2}|\mathbf{v}|^2 + p/\rho_0 + \phi$  は流線と渦線に沿って一定と言い直すこともできる。ただし、渦度は次章で述べる概念なので、ここでは、流線に沿って一定になるという点のみに着目して考えていく。

動圧と静圧: §3.2 での扱いと同様に、(3.10) 式で静水圧成分を除く ( $p$  を  $p - \rho_0\phi$  とする)、もしくは、等ポテンシャル面上での運動 ( $\phi = \text{一定}$ ) を考えると、流線に沿って、 $\rho_0 \frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2 + p$  が一定となる。したがって、ある点  $x_1$  での流速が  $|\mathbf{v}_1|$ 、そこから、流線に沿って進んだ点  $x_2$  での流速が  $|\mathbf{v}_2|$  であるとする、

$$p_2 - p_1 = \frac{\rho_0}{2} (|\mathbf{v}_1|^2 - |\mathbf{v}_2|^2) \quad (3.11)$$

となり、流速の減少 (増大) は圧力の増大 (減少) をもたらす。これは、減速や加速が起きるためには、圧力傾度力が必要ということの意味している。すなわち、風の中で何故我々は風圧を感じるかということの数学的な表現である。また、流速と圧力が置き換え可能ということから、 $\frac{1}{2}\rho_0|\mathbf{v}|^2$  を動圧、それに対して、 $p$  を静圧、 $\frac{1}{2}\rho_0|\mathbf{v}|^2 + p$  を総圧ともいう。

この原理を使えば、流速を測ることが可能である。この原理によって、風速を測る機器としては、ピトー (Pitot) 管がある。

Torricelli の定理: Bernoulli の定理を応用として、小さな孔の空いた大きな容器に入った

水の、その孔からの噴出速度を求めることができる。容器の水面にも、小さな孔にも同じ大気圧  $p_a$  がかかっていたとする。孔と水面の高さの違いを  $h$  とし、水面の降下速度が十分に小さいとする。この時、外力が重力であることに注意すれば、水面を起点とする流線に沿って、

$$\rho \frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2 + p + \rho g z = \text{一定} \quad (3.12)$$

が成り立つことが分かる。したがって、水面での速度 (水面の降下速度) を 0、小さな孔での速度を  $v$  とすると、

$$p_a + \rho g h = \rho \frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2 + p_a \quad (3.13)$$

となる。ここで、左辺が水面での値、右辺が孔での値である。よって、孔からの噴出速度は

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{2gh} . \quad (3.14)$$

これをトリチェリー (Torricelli) の定理という。これは、高さ  $h$  の場所から落下した質点が獲得する速度と同じである。

問題 3.3.1: 適当な流体力学の教科書で Pitot 管について調べ、それがどのようなものか述べよ。

問題 3.3.2: 水平に置かれた太さが途中で変わる円管の中に水を通したときの円管内部での圧力を調べるために、A 点と B 点の 2 点で細いガラス管を垂直に立てた。この細いガラス管の上端は開いており、大気圧 ( $p_a$ ) がかかっている。A 点での水平に置かれた円管の内径を  $a$ 、B 点では内径はその 2 倍である ( $2a$ ) とする。粘性等は考えず、円管の中での流速は半径方向には変わらないとする。

1. A 点での流速を  $U$  とする。B 点での流速はいくらか?
2. A 点に立てたガラス管には円管の中心から測って、高さ  $h$  まで水が上がってきていた。A 点での円管の中心での圧力 (静圧) はいくらか?
3. B 点のガラス管では、水はどの高さまで上がってくるか?

問題 3.3.3: 風速 10m/s の風の中で感じる風圧は風速 5m/s の風の中に比べて何倍か。また、実際に風に向かって立っているとき  $1\text{m}^2$  当りに感じる風圧はどれぐらいになるか計算せよ。ただし、空気の密度は、 $10^{-3}\text{g cm}^{-3}$  とし、背中での圧力は、風が吹いているところと同じであるとする。

問題 3.3.4: 流線型の物体は、そうでない物体に比べて抵抗が小さい。その理由を考えよ。

問題 3.3.5: 小さな孔を容器の底に開け、それによる水面の降下を利用して、水時計を作  
 することを考える。水面の降下速度を一定にするためには容器の形をどのようにすれ  
 ば良いか?

### 3.4 流線の曲率と圧力勾配

ここまでは1本の流線上での流速の変化に応じた圧力変化を Bernoulli の定理に基づき考  
 えてきた。Bernoulli の定理は、渦無しの場合や一つの Bernoulli 面に限れば異なる流線の  
 間でも成り立つが、一般には異なる流線の圧力については何も述べない。しかし、ポー  
 ルの回転のボールの軌跡への影響(変化球)等、流体力学上おもしろい問題を考えるとき  
 には、流線に直交する方向の圧力勾配が重要になる。そこで、流線に沿う方向(座標は  $s$ 、  
 単位ベクトル  $e_s$ )と直角方向( $+\pi/2$ 方向、座標は  $n$ 、単位ベクトル  $e_n$ )、それぞれの圧力  
 勾配を考えよう。流速ベクトルが  $(x, y)$  平面上にあるとしたとき、 $x$  方向の単位ベクトル  
 を  $\hat{x}$ 、 $y$  方向の単位ベクトルを  $\hat{y}$  とすれば、

$$\mathbf{v} = |\mathbf{v}|e_s = u\hat{x} + v\hat{y} \quad (3.15)$$

なので、

$$e_s = \frac{u}{|\mathbf{v}|}\hat{x} + \frac{v}{|\mathbf{v}|}\hat{y}, \quad e_n = -\frac{v}{|\mathbf{v}|}\hat{x} + \frac{u}{|\mathbf{v}|}\hat{y} \quad (3.16)$$

となる。

この座標系を用いると、移流を表す演算子は

$$\mathbf{v} \cdot \nabla = |\mathbf{v}| \frac{\partial}{\partial s} \quad (3.17)$$

なので、 $\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}$  は

$$\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = |\mathbf{v}| \frac{\partial}{\partial s} (|\mathbf{v}|e_s) = |\mathbf{v}| \frac{\partial |\mathbf{v}|}{\partial s} e_s + |\mathbf{v}|^2 \frac{\partial e_s}{\partial s} \quad (3.18)$$

と書ける。この最後の項の  $e_s$  の微分は、 $\frac{u}{|\mathbf{v}|} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{u}{|\mathbf{v}|} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{u^2 + v^2}{|\mathbf{v}|^2} \right) - \frac{v}{|\mathbf{v}|} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{v}{|\mathbf{v}|} \right) =$   
 $-\frac{v}{|\mathbf{v}|} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{v}{|\mathbf{v}|} \right)$  等に注意すると、

$$\frac{\partial}{\partial s} e_s = e_s \cdot \nabla e_s = \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{v}{|\mathbf{v}|} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{u}{|\mathbf{v}|} \right) \right] e_n = \kappa e_n = \frac{1}{R} e_n \quad (3.19)$$

と書き直せる。ここで、 $\kappa = 1/R$  は曲率で、 $R$  は曲率半径。この関係式は、 $e_s$  を円筒座  
 標の方位角方向の単位ベクトル、 $e_n$  を中心向きの単位ベクトルと思えば明らかであろう。

したがって、定常での力の釣り合いは

$$\nabla \left( \frac{p}{\rho_0} + \phi \right) = -\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -|\mathbf{v}| \frac{\partial |\mathbf{v}|}{\partial s} \mathbf{e}_s - \frac{1}{R} |\mathbf{v}|^2 \mathbf{e}_n \quad (3.20)$$

となり、静水圧成分 ( $\bar{p} = -\rho_0 \phi$ ) を除けば、流れと直交する方向 ( $\mathbf{e}_n$  方向) の圧力勾配は流速の2乗と曲率 ( $1/R$ ) の積に比例することが分かる。流速の2乗と曲率 ( $1/R$ ) の積は遠心力と同じ形であり、「流体粒子が曲線運動をするために必要となる向心力は圧力傾度力である」という、通常の力学でイメージしやすい結果を生む。

これを元に変化球を考えてみよう。ボールが回転していると粘性によりその周りにはボールの回転と同じ方向の回転する流れが生じる。それにより外向きの圧力勾配が生じ、ボールの表面の圧力は下がる。このボールが回転しながら空気中を動いているとき、例えば、バックスピンをかけたボールなら、ボールが動くことによるボールに相対的な気流により、その上面では回転的な流れが強まり、下面では弱まることになる。それ故、ボールの上側の圧力は下側より下がり、ボールには上向きの力が加わることになる。これが、バックスピンをかけたボールの落下が遅くなる理由である。

このような、ボールの回転による変化球や翼の揚力の説明に Bernoulli の定理を直接使い、流速が大きくなるから圧力が低下し、揚力が生じると説明している本も散見されるが、流れに直交する方向の圧力勾配はここで論じたように流体粒子の運動が曲率を持っていることによるのであって、(また、渦無しでない限り、流速と圧力の関係は、異なる流線間では一般には成り立たないことでもあり)、単純に、「流速が大きいところは周りより圧力が低い」などと記憶すべきではない。なお、渦無し流れだと曲率の概念を含めなくても済んでしまう理由は、渦無し流れの場合には流速の増大と曲率が1対1対応になっているからである。また、Bernoulli 面上で Bernoulli 関数が一定となるのは、その面を貫く過度ベクトルが存在せず、かつ流速ベクトルはその面に沿っているため、その面上での流れの分布 (流速と曲率の関係) が渦無し流れと同じになることによる。

問題 3.4.1: スプーンの柄を軽く持ち、スプーンの丸くなっている背の部分 (凸側) を、水道の蛇口から流れ落ちる水に近付けた。スプーンの背が水に接したとき、スプーンはどう動くか? 実験せよ。さらに、その理由を考えよ。

問題 3.4.2: 渦無し流れ ( $\nabla \times \mathbf{v} = 0$ ) を考えたとき、流線の曲率  $\kappa$  と流速  $|\mathbf{v}|$  は

$$-\frac{\partial |\mathbf{v}|}{\partial n} + \kappa |\mathbf{v}| = 0 \quad (3.21)$$

の関係を満足することを確認せよ。

さらに、(3.21) が成立している場合には、(3.20) は

$$\nabla \left( \frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2 + \frac{p}{\rho_0} + \phi \right) = 0$$

となることを示せ。

[ヒント]: 流れの方向を  $(x, y)$  平面内にとると、渦無し条件は  $\partial v / \partial x - \partial u / \partial y = 0$  である。この  $\partial v / \partial x - \partial u / \partial y$  を

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = |\mathbf{v}| \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{v}{|\mathbf{v}|} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{u}{|\mathbf{v}|} \right) \right] + \left[ \frac{v}{|\mathbf{v}|} \frac{\partial |\mathbf{v}|}{\partial x} - \frac{u}{|\mathbf{v}|} \frac{\partial |\mathbf{v}|}{\partial y} \right]$$

と書き換え、(3.16) と (3.19) を用いれば、(3.21) を求めることができる。

# Chapter 4

## 渦、渦度、循環

大気や海洋の大規模な運動は、多くの場合渦的である。例えば、高気圧や低気圧、台風などは立派な渦であるし、海洋にもそれに対応する中規模渦が存在する。これらには、地球が自転している（地球自体が巨大な渦である）ことが大きい、地球の自転が効かないような、小さなスケールでも、渦はいっぱいある。例えば、煙突の煙はモクモク立ち昇る。この「モクモク」は実は渦である。

### 4.1 渦度と循環

渦には強さと方向がある。それを表すベクトル量として、渦度ベクトル  $\boldsymbol{\omega}$  がある。

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \boldsymbol{v} . \quad (4.1)$$

デカルト座標系での  $(x, y, z)$  の各成分は

$$\omega_x = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \quad \omega_y = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \omega_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} . \quad (4.2)$$

渦度ベクトルの方向に  $z$  軸を取り、どのような流れがどのような渦度を持つか考えてみる。

- a. 剛体回転: 回転角速度  $\Omega$  で一様に回転する場合には、回転の中心に原点を取れば、流体粒子の位置の変化は

$$x = r \cos(\Omega t + \varphi), \quad y = r \sin(\Omega t + \varphi),$$

(ここで、 $\varphi$  は  $t = 0$  での位置)。それ故、速度の  $(x, y)$  成分  $(u, v)$  は

$$u = -\Omega y, \quad v = \Omega x$$

となり、渦度  $\omega_z$  は  $2\Omega$ 、すなわち、回転角速度の 2 倍になる。

b. 単純シア流: 流速ベクトルと直交する方向に流速が変化する流れをシア流という。

$$u(y) = Uy, \quad v = 0 \text{ の流れでは、} \omega_z = -U.$$

bの場合には、流れは渦的でないように思えるかも知れない。しかし、このようなシアを作るためには、流体粒子は回転的でなければならない。例えば、コロを使って、大きな石を運ぶ場合を考えよう。石は地面に平行に動くがコロは回転している。渦度というのは、個々の流体粒子が回転的であるかどうかを表すものであり、全体として渦のようにぐるぐる回することは意味しない。ある渦度を流体が持っているとしたとき、渦的にぐるぐる回るか、シア流になるかは、外部条件によって決まる。

(4.2) より、

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\omega} = \nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{v}) = 0. \quad (4.3)$$

これより、渦度ベクトルは非発散であることが分かる。非発散であるというのは、ある閉曲面を考えたとき、その中に入っていく渦度と出てくる渦度の総和が等しいということである。渦度ベクトルの各点での接線をつないだものを渦線というが、上のことは、この渦線が流体中でとぎれることはない、したがって、境界から境界へ(もしくは、無限遠点から無限遠点へ) 伸びるか、もしくは、輪(渦輪)を形成するか、の何れかであることを意味する。

渦的なものを定義するもう一つの量に循環がある。流体中に閉曲線  $C$  を考え、その接線方向の線要素を  $dr$  としたとき、循環  $\Gamma$  は

$$\Gamma = \oint_C \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{r} \quad (4.4)$$

で定義される。もし、 $\boldsymbol{v}$  が場所によらず一様であるならば、 $C$  の取り方によらず、 $\Gamma = 0$  である。他方、上の剛体回転する流体中に半径  $R$  の円を考えれば、 $\Gamma$  はその円の中心の位置によらず、 $2\pi\Omega R^2$  である。これは、渦度に面積を掛けたものに等しい。実際、 $C$  をその縁とする任意の曲面  $A$  を考え、その面  $A$  の法線単位ベクトルを  $\boldsymbol{n}$  とするとき、ストークスの定理より

$$\Gamma = \oint_C \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_A \nabla \times \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} dA = \int_A \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{n} dA \quad (4.5)$$

となる。すなわち、循環は閉曲線  $C$  の内部を通過する渦度ベクトルの大きさの総和である。

閉曲線  $C$  を構成する渦線によって作られる管を渦管という。渦度ベクトルは非発散なので、一つの渦管の任意の断面を通過する渦度ベクトルの総量は何処でも同じである。したがって、一本の渦管の回りの循環は何処でも等しい。他方、循環は渦度  $\times$  面積であるから、渦管の断面積を  $A$ 、渦度ベクトルのその面に直交する成分の平均値を  $\bar{\omega}$  とすると

$$\bar{\omega} = \frac{\Gamma}{A}. \quad (4.6)$$



したがって、一本の渦管を考えた場合には、渦管が細くなっているところでは、渦度は強く、渦管が太くなっているところでは、渦度は弱いということになる。

(4.5) 式より、渦度ゼロの流体中のごく限られた領域に渦度を持つ流体がある場合、その領域を囲むように  $C$  を取れば、 $C$  の取り方によらず、その循環は等しいということになる。このことは、流体粒子自身が回転的でなくとも渦度のある領域がその内部にあれば、その周りを流体粒子は回るということである。

問題 4.1.1: 2次元非発散流における渦度と流線。 $z$  方向には場が一様 ( $z$  微分がゼロ) で、かつ、密度一定の流体を考える。その時、連続の式は、

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

が満足される。この場合には、流線関数  $\psi$  が導入でき、

$$u = -\frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

と書ける。(問題 2.4.2 参照)

- (a) 渦度の  $z$  成分  $\omega_z$  を流線関数を用いて表せ。
- (b) 以下の流れが 2次元非発散であることを確認し、それぞれについて流線関数  $\psi(x, y)$  を求め、その分布を図示せよ。さらに、渦度ベクトルの  $z$  成分  $\omega_z$  を計算し、渦度が空間的一定でない場合には、その分布も重ねて図示せよ。

(i)  $u = y, \quad v = -x$

(ii)  $u = \sin(x - y), \quad v = \sin(x - y)$

問題 4.1.2: 次のような半径  $R$  の円形領域のみに一様な渦度が存在し、その外部では渦度がゼロであるような場に対応する同心円状の流れの場を求めよ。また、横軸に中心からの距離、縦軸に流速を取り、流れの分布を図示せよ。

$$\omega_z = \begin{cases} \omega_0 & r \leq R \\ 0 & r > R \end{cases}$$

$$\omega_x = \omega_y = 0, \quad w = 0$$

ただし、 $\nabla \times \mathbf{v}$  の  $z$  成分は円筒座標では

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r v_\theta - \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta}$$

と書ける。なお、ここでは、同心円状の流れなので  $\theta$  に対する依存性はない。このような渦をランキン渦という。

問題 4.1.3:  $z = z_0$  で流れの場を計測したところ、渦度は、 $\omega_z = \omega_0, \omega_x = \omega_y = 0$  で、 $x-y$  平面内で、ディスク状に回転していた。ところが、その少し上と下の面、 $z = z_0 + \Delta z$ 、 $z = z_0 - \Delta z$  では、流れがなかった。このような流れの分布は可能か。もし可能ならば、渦線はどのようになっているか。

## 4.2 循環定理、渦定理、ポテンシャル渦度

循環の時間発展、

$$\frac{D}{Dt}\Gamma = \frac{D}{Dt} \oint_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} \quad (4.7)$$

を考える。ここで Lagrange 微分を考えるということは、 $C$  として流体粒子とともに流れ、変形していくものを考えるということである。右辺を変形すると

$$\frac{D}{Dt} \oint_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \oint_C \frac{D\mathbf{v}}{Dt} \cdot d\mathbf{r} + \oint_C \mathbf{v} \cdot \frac{D}{Dt} d\mathbf{r} . \quad (4.8)$$

右辺第 2 項の  $Dd\mathbf{r}/Dt$  は  $C$  自体の変形から来る項で、 $C$  に沿うベクトル要素  $d\mathbf{r}$  の時間変化が、 $d\mathbf{r}$  の終点と始点での速度差  $d\mathbf{v}$  によることに注意して変形すれば、

$$\oint_C \mathbf{v} \cdot \frac{D}{Dt} d\mathbf{r} = \oint_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{v} = \frac{1}{2} \oint_C d|\mathbf{v}|^2 = 0 \quad (4.9)$$

を得、さらに、(4.8) の右辺第 1 項に運動方程式を用いると、(4.7) は

$$\frac{D}{Dt}\Gamma = - \oint_C \left( \frac{1}{\rho} \nabla p + \nabla \phi \right) \cdot d\mathbf{r} \quad (4.10)$$

となる。密度一定、もしくは、順圧流体 ( $\rho = \rho(p)$ ) を仮定すれば、すべて  $\nabla$  の中に入ってしまうので、一回り積分すると右辺はゼロ。よって、

$$\frac{D}{Dt}\Gamma = 0 , \quad (4.11)$$

すなわち、(そのような場合に対しては) 循環の強さは時間的に一定である。これを Kelvin の循環定理という。

次に、渦線によって構成される面 (例えば、渦管の側面) を考える。そのような面を渦面という。渦面を貫く渦度ベクトルは、渦面の定義より、存在しない。したがって、渦面上に任意の閉曲線  $C$  に関する循環はゼロである。Kelvin の循環定理より、流されて変形しても、この循環はゼロのままなので、渦面は流されても渦面のままであることが分かる。渦管は、渦面によって包まれたものなので、渦管の循環が保存することも考慮すると「保存力のもとでの完全流体の連続的な運動においては、一つの渦管は常に一つの渦管と

して保たれ、その循環の強さは時間的に一定である」と言える。これを Helmholtz の渦定理という。

上のことより、もし初期状態で、至るところ渦度ゼロ (どのような閉曲線をとっても循環がゼロ、「渦なし」という) なら、永遠に渦なしのままであり、また、最初に渦度があれば、消滅することもない。これを Lagrange の渦定理 (渦の不生不滅の定理) という。

さて、今考えている流体は、非粘性の完全流体である。通常の剛体と同様に散逸がなければ、一度回転し出すと永遠に回転し続けることになる。つまり、散逸がないので角運動量は保存する。実は循環の保存は角運動量の保存の流体版である (問題 4.2.2)。先に見たように渦管の断面積  $A$  と渦度ベクトルのその面に直交する成分の平均値  $\bar{\omega}$  との関係は

$$\Gamma = \bar{\omega} A = \text{一定} \quad (4.12)$$

であった。したがって、流されつつ断面積が減少すると回転が速くなる (渦度の絶対値が大きくなる)。これは、フィギュアスケートのスピンにおいて、スケーターが回転しながら手を縮めると速く回転するのと同じである。また、同じ流体粒子から構成される渦管の長さ  $h$  の部分を考えると、質量保存より、

$$\rho A h = \text{一定} \quad (4.13)$$

であるから、(4.12) は

$$Q = \frac{\omega}{\rho h} = \text{一定} \quad (4.14)$$

とも書ける。この  $Q$  をポテンシャル渦度 (渦位) という (章末の参考参照)。 $\rho$  があまり変化しないとすれば、 $A$  の減少は渦管が伸びることに対応する。伸びれば渦度が強まる。竜巻の成因である。

なお、非粘性の世界では、渦は「不生不滅」である。したがって、現実の渦いっぱいの世界を作るには粘性が重要であると推察される。粘性があれば、個体壁では、流速がゼロになるため、その周りにシアが形成される。すなわち渦度が生じる。渦が物体のそばを離れると、この世は非粘性に近いので、渦はなかなか消えず、渦いっぱいの現実世界が作られる。その後の世界は非粘性の方程式でかなりの部分までは記述できる。また、地球は自転している。地球上の流体は近似的には地球とともに自転しているので、地球上の流体はもともと回転的である (渦度を持っている) と言うことができる。したがって、何らかの要因で渦管が伸びれば、その部分での渦度が増大し、地球自転と同じ方向の渦度を持つ渦が現れる。例えば、台風では、強い雨が降る。雨が降れば、空気中の水蒸気が凝結して、大気に潜熱が放出される、すなわち、空気が暖められることになる。そのため、対流圏中

中央部に強い上昇流が生まれる。この上昇流によって、台風の下半分の渦管は伸ばされ、地球自転と同じ方向の強い渦が作られる。

問題 4.2.1: 問題 4.1.3 では流れが同心円状であるという仮定の下に解を求めた。一般には、解は同次解と非同次解の足し合せであり、適当な同次解 (渦度ゼロの流れ) を加えれば同心円状以外の解もありそうに思える。しかし、問題 4.1.3 場合、定常であれば、同心円状の解しか存在できない。何故か。

問題 4.2.2: 循環と角運動量。高さ  $h$ 、半径  $a$ 、密度  $\rho$  の円筒を考える。円筒が、円筒の軸の周りに角速度  $\Omega$  で回転していたとする。そのときの角運動量を求めよ。質量と角運動量を一定としたときの回転角速度と円柱の断面積、円柱の高さとの関係はどうなるか。(4.12), (4.14) 式と比較せよ。

問題 4.2.3: 問題 2.4.1 の変形。問題 2.4.1 では、水平の流れは中心向きのものだけを考えて、ここでは、回転しながら中心に向かう流れを考える。問題 2.4.1 と同様に、密度は一定、 $z = 0$  (地面) での鉛直流  $w$  はゼロであるとし、(円筒座標における) 動径 ( $r$ ) 方向の流速成分は、時刻 ( $t$ )、 $z, \theta$  に依らず  $v_r(r) = -Ur$  とする。 $t = 0$  での方位角方向の流速成分を  $v_\theta(r, 0) = \Omega_0 r$  ( $\Omega_0$  は定数) とし、以下の問に答えよ。なお、 $v_\theta$  は  $r$  と  $t$  のみの関数である。

(a)  $t = 0$  での渦度を求めよ。ただし、円筒座標系での渦度ベクトルは、

$$\nabla \times \mathbf{v} = \frac{1}{r} \begin{vmatrix} \hat{r} & r\hat{\theta} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_r & rv_\theta & w \end{vmatrix}$$

により計算できる。ここで、 $\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{z}$  は  $r, \theta, z$  方向の単位ベクトル。

(b) 時刻  $t$  での渦度を求めよ。(問題 2.4.1 の円筒の時間変化を元に考える)

(c) 時刻  $t$  での流速場を求めよ。

問題 4.2.4: Kelvin の循環定理の導出に際して、上では順圧流体を仮定している。しかし、一般に、地球流体を考える場合、順圧的とは限らない。そのような場合にも、もし、 $D\lambda/Dt = 0$  を満足し、かつ、 $p$  と  $\rho$  のみの関数である物理量  $\lambda(p, \rho)$  が存在すれば、 $\lambda(p, \rho) = \text{一定}$  となる面上に閉曲線  $C$  を取ることにより、(4.11) を得ることができる。このことを示せ。(章末の [参考] 参照)

### 4.3 渦度方程式

Kelvin の循環定理は大変有用である。実際、回転流体の大規模運動を考える際には、Kelvin の定理がその理解の基礎を与える。しかし、渦度そのものはベクトルなので、一般には、その方向もまた重要である。直接渦度ベクトルの変化を支配する方程式を求めてみよう。渦度方程式は、運動方程式の rotation を取ることにより、得られる。

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + \nabla \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}) = \frac{\nabla \rho \times \nabla p}{\rho^2}. \quad (4.15)$$

ベクトル公式

$$\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = -(\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A} + \mathbf{A}(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{A})$$

を用いて、これをさらに書き換えると、

$$\frac{D\boldsymbol{\omega}}{Dt} = (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{v} - \boldsymbol{\omega}(\nabla \cdot \mathbf{v}) + \frac{\nabla \rho \times \nabla p}{\rho^2} \quad (4.16)$$

と書ける。左辺は流体粒子の渦度の時間変化を表し、右辺第 3 項は傾圧項である。傾圧項は、等密度面と等圧面がずれているとき、等密度面と等圧面を一致させるようにトルクが働くことによる渦度生成項であり、密度一定もしくは順圧流体 ( $\rho = \rho(p)$ ) ではゼロである。

右辺第 1 項と第 2 項の意味を明らかにするために、 $\boldsymbol{\omega} = (0, 0, \omega_z)$  の場合を考える。この時、

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega} \cdot \nabla \mathbf{v} - \boldsymbol{\omega} \nabla \cdot \mathbf{v} &= \omega_z \frac{\partial}{\partial z} \{u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + w\mathbf{k}\} - \omega_z \mathbf{k} \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right\} \\ &= i\omega_z \frac{\partial u}{\partial z} + j\omega_z \frac{\partial v}{\partial z} - k\omega_z \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right\} \end{aligned} \quad (4.17)$$

である。ここで、 $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  は  $x, y, z$  方向の単位ベクトル。最後の式の最初の 2 つの項は、 $(u, v)$  に鉛直シアがあることにより、渦度ベクトルが傾けられることを意味する。例えば、 $\partial u / \partial z$  は直立していた渦管を  $x$  方向に傾けるので、渦度の  $x$  成分を産み出す。ただし、等  $z$  面で切った時の渦管の断面は変化しないので、渦度の  $z$  成分は鉛直シアの影響は受けない。他方、第 3 項は Kelvin の循環定理でお馴染みの  $(x, y)$  平面での面積の減少増大の効果を表す。

問題 4.3.1: (4.15) 式と (4.16) 式を導け。

問題 4.3.2: 密度一様な流体を考える。  $\partial u/\partial x + \partial v/\partial y = \partial v/\partial z = 0$ 、 $\partial u/\partial z$  は一定と仮定する。  $t = 0$  で  $\omega = (0, 0, \omega_z)$  であった渦度ベクトル、 $\omega$ 、は微小時間  $\Delta t$  後にはどうなるか。この時、 $|\omega|$  は変化するが、循環は保存することを示せ。

問題 4.3.3:  $z$  方向には流れの場が一様 ( $z$  微分がゼロ) で、 $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$  で、かつ、密度一定の場合、 $z$  成分の渦度方程式は、流線関数  $\psi(x, y)$  のみによって書くことができる。その方程式を求めよ。また、その場合、流体粒子毎の渦度は保存する。そのことを示せ。

なお、渦度方程式が流線関数のみで書き表されるということは、このような 2 次元の問題を扱う場合には、運動方程式を解くよりも渦度方程式を解く方が簡便であることを意味する。

問題 4.3.4: 適当な面を考えて、渦度方程式をその面上で積分すれば循環定理が得られる筈である。ここでは、簡単のために、 $\partial u/\partial z = \partial v/\partial z = 0$ 、 $\omega = (0, 0, \omega_z)$  を仮定して、順圧流体に対する渦度方程式から循環の式 (4.11) を導け。

## 参考: 成層流体中での循環とポテンシャル渦度

地球流体力学においてもっとも重要な概念は (4.14) のポテンシャル渦度である。このポテンシャル渦度は成層流体中でも保存する。このことについて少し詳しく見てみる。

循環は

$$\Gamma = \oint_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \iint_A \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n} dA$$

であった。ここで、 $\boldsymbol{\omega}$  は渦度、 $\mathbf{n}$  は面  $A$  の法線ベクトルである。循環の保存, (4.11),

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = 0 \tag{4.18}$$

が成り立つためには、密度が圧力のみ関数、すなわち、 $\rho = \rho(p)$ 、である必要があったが、

$$\frac{D\lambda}{Dt} = 0 \tag{4.19}$$

を満足する  $\lambda$  が、 $p$  と  $\rho$  のみの関数 ( $\lambda(p, \rho)$ ) の場合、 $\lambda$  一定の面上に  $C$  を取れば、 $\rho = \rho(p)$  で無い場合にも同じことが言える。この場合、 $\lambda$  も  $C$  も流されるだけなので、 $\lambda$  一定の面上の  $C$  は常にその面上にあり、 $\rho$  は  $p$  と  $\lambda$  のみの関数 ( $\rho = \rho(p, \lambda)$ ) なので、( $\lambda$  は一定より) この面上では  $\rho$  は  $p$  のみの関数と見なせるからである。非圧縮の場合には、 $\lambda$  として、

密度  $\rho$  を、圧縮性のある場合には、 $\lambda$  としては温位を取ればよい。密度一定の場合は任意の物質面を取れば良い。

次に、 $C$  を通過する渦線からなる渦管の、 $\lambda = \lambda_1$  と  $\lambda = \lambda_2$  に挟まれた部分を考える。この部分は物質面に囲まれているので、その質量は一定である。渦管の断面積が  $\lambda = \lambda_1$  と  $\lambda = \lambda_2$  の間で (二つの面の距離は十分に小さく) 一定と見なせるならば、その質量は

$$M = \rho Ah \quad (4.20)$$

である。ここで、 $h$  は  $\lambda = \lambda_1$  の面と  $\lambda = \lambda_2$  の面との距離。よって、 $C$  内で  $\omega$  一定と見做せる場合 ( $C$  で囲まれる領域を十分に小さく取った場合) には

$$\Gamma = \frac{M\omega \cdot \mathbf{n}}{\rho h} \quad (4.21)$$

となる。他方、

$$\nabla\lambda = \lim_{\lambda_2 \rightarrow \lambda_1} \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)\mathbf{n}}{h} \quad (4.22)$$

なので、 $\mathbf{n}/h$  を  $\nabla\lambda/(\lambda_1 - \lambda_2)$  で置き換えることができ、 $M$  一定を考慮すると、(一定の係数には意味がないので、それらを除き) 循環の保存は

$$\frac{D}{Dt} \frac{\omega \cdot \nabla\lambda}{\rho} = 0 \quad (4.23)$$

と書き変えることができる。この

$$Q = \frac{\omega \cdot \nabla\lambda}{\rho} \quad (4.24)$$

がポテンシャル渦度である。この場合、ポテンシャル渦度は流体粒子毎に定義される。

何れにせよ、意味的には、流体粒子の角運動量に対応するポテンシャル渦度は Lagrange 的に保存し、2つの物質面間の距離が変化すれば、それに見合うだけ、物質面に直交する渦度の成分が変化するということである。循環定理そのもので何ら変更はない。

問題 4.A.1: 渦度方程式 (4.16), 連続の式 (2.15), 並びに, (4.19) から, (4.23) を導出せよ。

[ヒント]: まず, (2.15) は

$$\frac{D}{Dt} \frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \mathbf{v}$$

と書き換えられることを示し、この式に  $\omega$  を乗じたものに (4.16) を  $\rho$  で割ったものを加える。さらに、その式と  $\nabla\lambda$  の内積を取る ( $\lambda = \lambda(p, \rho)$  であることに注意)。また、(4.19) に左から  $\frac{\omega}{\rho} \cdot \nabla$  を作用させる。結果は

$$\frac{\omega}{\rho} \cdot \frac{D}{Dt} \nabla\lambda + \frac{(\omega \cdot \nabla)\mathbf{v}}{\rho} \cdot \nabla\lambda = 0$$

となる。この式と、前に得られた式の和を取ると (4.23) が得られる。

# Chapter 5

## 水の波

流体の運動を考えると、前節の「渦」とともに重要となるのが、「波」である。波というのは、ある静止状態からのズレ(変位)に対して復元力が働く場合に生じる。例えば、圧縮性を考慮した場合に生じる音波は、空気が何らかの形で圧縮されたとき、それが膨張しようとすることによって生じる。膨張するときに隣の空気を押す。押された空気は圧縮される。圧縮された空気は膨張し、さらにその隣の空気を押す。そうやって、空気の粒子そのものはたいして動かないにも関わらず、圧縮されている領域は遠くまで伝わることになる。波動は、音波であれ、なんであれ、数学的にはほぼ同じである。ここでは、重力を復元力とする水の波を考える。石を池に投げ込んだときに生じる波である。

### 5.1 浅水波

流体の方程式は複雑である。地球上の流体の各種の複雑な現象が基本的にはこの方程式に従うことを考えれば、流体の方程式を直接扱うことは、多くの場合、複雑すぎてあまり賢明ではないことは明らかであろう。したがって、必要な要素だけを残し、方程式を簡単化して考えることが重要である。ここでは、まず、浅水近似を行う。地球上の大規模な流体運動を考える場合、水平スケールに比べて、鉛直スケールは非常に小さい。この条件を入れることにより、物事はだいぶ扱いやすくなる。

#### 5.1.1 浅水方程式

理想流体の運動方程式は、直角座標を用いて、

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \left( u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z} \right) u = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x}, \quad (5.1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \left( u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z} \right) v = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial y}, \quad (5.2)$$



$$\frac{\partial w}{\partial t} + \left( u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z} \right) w = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial z} - \frac{\rho'}{\rho} g, \quad (5.3)$$

と書ける。ここで、 $(x, y)$  は水平の座標、 $z$  は鉛直上向きである。また、以下の議論を明確にするために、密度一定は仮定せず、密度  $\rho$  と圧力  $p$  を静止状態のもの、 $\bar{\rho}(z), \bar{p}(z)$ 、と変動成分を  $\rho'(x, y, z, t)$ 、 $p(x, y, z, t)$  に分離し、静止状態での圧力の関係式 (静水圧の式)、 $\partial \bar{p} / \partial z = -\bar{\rho} g$ 、を用いて、静止状態での圧力を除いてある。連続の式は非圧縮を仮定し、

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (5.4)$$

運動の鉛直スケールを  $D$ 、水平スケールを  $L$ 、 $w$  のスケールを  $W$ 、水平流速のスケールを  $U$  とすると、連続の式より、

$$W = \frac{D}{L} U. \quad (5.5)$$

水平の方程式で、右辺の圧力傾度力と左辺の時間変動項が釣り合っているとすると、

$$P = \frac{\rho U L}{T}. \quad (5.6)$$

ここで、 $P$  は圧力変動のスケールで、 $T$  は時間スケール。(5.5) と (5.6) を用いて、(5.3) の左辺の  $\partial w / \partial t$  と右辺の  $(1/\rho) \partial p' / \partial z$  の大きさの比を見積もると、

$$\frac{|\rho \partial w / \partial t|}{|\partial p' / \partial z|} = O \left( \left( \frac{D}{L} \right)^2 \right). \quad (5.7)$$

ここで  $O(*)$  は \* と同程度の大きさという意味である。したがって、 $(D/L)^2 \ll 1$  の場合には、水平運動を引き起こす圧力場の変動は、鉛直の運動方程式においては、加速度項ではなく、浮力項と釣り合う、もしくは、密度一様 ( $\rho' = 0$ ) ならば、 $p'$  は  $z$  方向にはほとんど変化しない (変化の大きさは  $(D/L)^2$  程度) ということになる。すなわち、この場合には、(5.3) は

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial z} - \frac{\rho'}{\rho} g, \quad (5.8)$$

と近似的に書くことができる。この式に  $\rho$  をかけ、静止状態での式、 $-\partial \bar{p} / \partial z - \bar{\rho} g = 0$ 、を加えると、

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial z} - \rho g, \quad (5.9)$$

となる。これは、変動場を含んでいるにも関わらず静止状態の式と同じである。鉛直の運動方程式をこのように近似することを静水圧近似という。

平均水面を  $z = 0$ 、実際の水面の高さを  $z = \eta(x, y, t)$  とし、さらに、流体の密度  $\rho$  が時空間的に一定 ( $\rho = \rho_0$ ) であると仮定すると、(5.9) は簡単に積分できて、

$$p = p_a - \rho_0 g (z - \eta). \quad (5.10)$$

ここで、 $p_a$  は大気圧 (一定と仮定)。(5.10) を (5.1) と (5.2) に代入すると、それらの式の右辺 (圧力傾度力) は、水面の変位のみによって決まり、 $z$  に依存しなくなる。右辺が  $z$  に依存しないので、(少なくとも圧力傾度力によって引き起こされる運動は)  $z$  に依存しないと考えられる。すなわち、 $u, v$  は  $x, y, t$  のみの関数。とすれば、(5.1) と (5.2) は

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \left( u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} \right) u = -g \frac{\partial \eta}{\partial x}, \quad (5.11)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \left( u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} \right) v = -g \frac{\partial \eta}{\partial y}, \quad (5.12)$$

$(u, v)$  が  $z$  に依存しないなら、(5.4) は容易に積分できて、

$$w|_{z=\eta} - w|_{z=-H} + (H + \eta) \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0. \quad (5.13)$$

ここで、 $z = -H$  は底。水面並びに底での鉛直流速は、

$$w|_{z=\eta} = \frac{D\eta}{Dt} = \frac{\partial \eta}{\partial t} + u \frac{\partial \eta}{\partial x} + v \frac{\partial \eta}{\partial y}, \quad (5.14)$$

$$w|_{z=-H} = -\frac{DH}{Dt} = -u \frac{\partial H}{\partial x} - v \frac{\partial H}{\partial y}. \quad (5.15)$$

したがって、(5.13) は

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \{ (H + \eta)u \} + \frac{\partial}{\partial y} \{ (H + \eta)v \} = 0. \quad (5.16)$$

この方程式は、水平流速の収束発散に伴って、水面が変位することを示している。

これで、 $(u, v, \eta)$  に対する 3 つの方程式 ((5.11), (5.12), (5.16)) が得られた。したがって、解くことは可能である。このように、水平スケールが鉛直スケールより十分に大きい場合には静水圧近似が導入でき、そのようにして得られた方程式を浅水方程式という。この方程式系は、「浅水」と名付けられているが、水面は密度成層を表していると思ふこともでき、水平スケールが鉛直スケールに比べて十分に大きな大気現象の力学を考える際にも用いられる。

問 5.1.1: 静水圧の式、(5.8)、を密度一様でない場合について解く (2 層モデル)。

- (1)  $\rho = \rho_0$  for  $z > -h$ ,  $\rho = \rho_0 + \Delta\rho$  for  $z < -h$ , とし ( $z = -h$  で密度が不連続に変わっている)、水面の  $z$  座標を  $\eta$  としたとき、 $z < -h$  での圧力はどうか?
- (2)  $\partial\eta/\partial x \neq 0$  で、かつ、 $\partial p/\partial x = 0$  for  $z < -h$  であるとする、 $\partial h/\partial x$  はどうあらねばならないか? 海洋では、 $\Delta\rho/\rho_0 \simeq 10^{-3}$  である。海面が 1m 盛り上がり、かつ、深い方で、圧力の水平勾配がゼロであるとする、 $h$  はどのようになっているか?

問 5.1.2:  $x$  方向の長さ  $\Delta x$ ,  $y$  方向の長さ  $\Delta y$  の矩形領域を考え、その領域での水の収支から、(5.16) 式を導出せよ。

問 5.1.3: (5.11), (5.12), (5.16) を用いて、

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{1}{2} [h(u^2 + v^2) + g\eta^2] \right\} + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \left[ \frac{1}{2} h(u^2 + v^2) + gh\eta \right] u \right\} \\ + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \left[ \frac{1}{2} h(u^2 + v^2) + gh\eta \right] v \right\} = 0 \end{aligned}$$

が成り立つことを示せ (ここで、 $h = H + \eta$ )。これはエネルギー方程式である。第 1 項の時間微分の中の項に密度  $\rho_0$  をかけたもの

$$E = \rho_0 \left\{ \frac{1}{2} [h(u^2 + v^2) + g\eta^2] \right\}$$

が、運動エネルギーと水面変位に伴う位置エネルギーの和になっていることを確認せよ。

## 5.1.2 浅水波

方程式系、(5.11), (5.12), (5.16) が持つ波の解を調べる。簡単のために、 $H$  は一定、すなわち底は平らであるとする。水面の静止状態からの微小な変位  $\eta$  ( $\eta \ll H$ ) を考える。この場合、その変位の大きさ (振幅) を  $\eta_0$ 、時間スケール (周期) を  $T$ 、空間スケール (波長) を  $L$  とすると、(5.16) より、それに伴う (長さスケール  $L$ 、時間スケール  $T$  の) 水平流速の大きさは、

$$U = \frac{\eta_0 L}{HT} \quad (5.17)$$

程度になる。これは水面変位の振幅  $\eta_0$  に比例する。したがって、水面変位の振幅を十分小さく取れば、それに伴う流速変動の幅も小さくなる。運動方程式、(5.11), (5.12) の非線形項並びに連続の式 (5.16) の非線形項 ( $u\partial\eta/\partial x + v\partial\eta/\partial y$ ) は  $\eta_0$  の 2 乗なので、他の  $\eta_0$  の 1 次の項に比べて、 $\eta_0$  を十分に小さく取れば無視できる。そのような近似を線形近似と言い、この手続きを線形化と言う。方程式は、

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -g \frac{\partial \eta}{\partial x}, \quad (5.18)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -g \frac{\partial \eta}{\partial y}, \quad (5.19)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + H \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right\} = 0, \quad (5.20)$$

となる。運動方程式 ((5.18) と (5.19)) は水面変位に伴う圧力傾度力による加速を、連続の式 (5.20) はその流れの場の収束発散による水面の変位の発展を記述している。すなわち、この連立方程式は、水面の変位により流速が作られ、その作られた水平流速の収束発散により水面の変位が作られ、その水面の変位によりさらに流速が...、というふうに水面変位と流速場が相互に影響しながら時間変化していくということを表している。

これらの方程式から、 $u, v$  を消去すると、

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - gH \left\{ \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} \right\} = 0. \quad (5.21)$$

これが浅水波を支配する方程式である。係数は定数なので、指数関数型の解 (指数関数、もしくは、三角関数) を持つはずである。そこで、

$$\eta = \eta_0 e^{i(kx + ly - \sigma t)}, \quad (5.22)$$

を (5.21) に代入すると、(5.21) がこの形の解を持つためには、

$$\sigma = \pm \sqrt{gH(k^2 + l^2)} \quad (5.23)$$

でなければならないことが分かる。(5.22) の形の解を平面波 (plane wave) の解と言う。次に、この平面波の解とは何かを考える。

平面波の解は位相  $\theta = kx + ly - \sigma t$  のサイン型の解である。場所を固定すれば、振動数  $\sigma$  で位相が変わる (振動する)。他方、時間を固定して考えると、 $kx + ly = \text{一定}$  を満足する  $(x, y)$  の方向には位相は変化しない。この方向は波の峰や谷が延びている方向を表す。したがって、それと直交するベクトル  $\mathbf{K} = (k, l)$  は波の伝播の方向、もしくは、それと平行逆向きである ( $\sigma > 0$  の時には同じ向き、 $\sigma < 0$  の時は逆向き)。この  $\mathbf{K}$  は単位長さ当たりの波の数  $\times 2\pi$  に対応するので、波数ベクトルとよばれる。波数ベクトル方向の波長は、 $2\pi/|\mathbf{K}|$  である。 $\mathbf{r} = (x, y)$  としたとき、

$$\theta = |\mathbf{K}| \left\{ \frac{\mathbf{K}}{|\mathbf{K}|} \cdot \mathbf{r} \mp \sqrt{gH} t \right\} \quad (5.24)$$

なので、この  $\mathbf{K}$  の向きへの波の位相の進む速度 (位相速度) は

$$c = \pm \sqrt{gH} \quad (5.25)$$

と書ける。 $y$  を固定した場合の  $x$  方向の位相速度、 $c_x$ 、 $x$  を固定した場合の  $y$  方向の位相速度、 $c_y$ 、それぞれは、

$$c_x = \pm \frac{|\mathbf{K}|}{k} \sqrt{gH}, \quad c_y = \pm \frac{|\mathbf{K}|}{l} \sqrt{gH}, \quad (5.26)$$

と書ける。したがって、 $c$  より小さくなることはない。これは、 $x$  方向、 $y$  方向の波長が  $K$  方向の波長よりも小さくならないためである。 $(c_x, c_y)$  は  $K$  に沿う方向の位相速度、 $c$  の  $(x, y)$  成分ではないことに注意。

この波に伴う速度場は、

$$u = \frac{kc}{|\mathbf{K}|H} \eta_0 e^{i(kx+ly-\sigma t)}, \quad (5.27)$$

$$v = \frac{lc}{|\mathbf{K}|H} \eta_0 e^{i(kx+ly-\sigma t)}, \quad (5.28)$$

$$w = -i \left(1 + \frac{z}{H}\right) |\mathbf{K}| c \eta_0 e^{i(kx+ly-\sigma t)}, \quad (5.29)$$

であり、波数方向の流速成分は水平 2 次元の流速ベクトルを  $\mathbf{u} = (u, v)$  とすると、

$$\frac{\mathbf{K}}{|\mathbf{K}|} \cdot \mathbf{u} = \frac{c\eta_0}{H} e^{i(kx+ly-\sigma t)}. \quad (5.30)$$

また、それに直交する方向の流速はゼロであることが分かる。水平流速は、峰では波の伝播方向と同じ、谷では逆向きになる。また、鉛直流速は、水面変位より  $\pi/2$  だけ位相が早く、波の峰の前方で上向き最大の値を取る。流体粒子は波面に直交する面内 (波数ベクトルと鉛直ベクトルによって張られる面内) で楕円運動をしていると見ることができる。

なお、波動方程式 (5.21) の一般解はいろいろな  $(k, l)$  を持つ (5.22) の形の解の重ね合わせによって表現できる。要するに、(5.22) はフーリエ変換したときのフーリエ成分の一つである。

問 5.1.4: ある点 A で水面の変位を観測した。水面の高さの変動周期は 1 分であった。水深を 10m としたとき、この変位が浅水波によるならば波長はいくらか。また、観測点 A から東に 210m 程度離れた地点 B で観測すると、振幅の位相は A 点よりも 90 度遅れていた (A 点で水位が最大の時、B 点で水位はゼロ ( $\eta = 0$ )、A 点での水位が最大値から減少し始める時も B 点での水位は上昇)。さらに、A 点から北に少し離れた地点での水位変動は A 点より若干遅れていた。この波の伝播方向を考えよ。

### 5.1.3 境界の影響

前節では、無限に広い領域における平面波の解を考えた。ここでは、境界の影響を見る。まず、 $y = 0, L$  に境界があり、 $x$  方向には無限に続く水路を考えよう。この場合、 $y = 0, L$  での境界条件は、そこで  $v = 0$ 、すなわち、

$$\frac{\partial \eta}{\partial y} = 0 \quad \text{at } y = 0, L. \quad (5.31)$$

境界条件が、 $x, t$ によらず、 $y = 0, L$ で与えられているので、 $\eta(x, y, t) = A(x, t)B(y)$  と変数分離を行う。これを (5.21) に代入すると、分離定数を  $\lambda^2$  としたとき、

$$\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} - gH \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \lambda^2 A = 0, \quad (5.32)$$

$$\frac{d^2 B}{dy^2} + \frac{\lambda^2}{gH} B = 0, \quad (5.33)$$

$$\frac{dB}{dy} = 0 \quad \text{at } y = 0, L, \quad (5.34)$$

が得られる。(5.33) を (5.34) の下に解くと

$$B(y) = \eta_0 \cos \frac{\lambda}{\sqrt{gH}} y, \quad \lambda = \frac{n\pi\sqrt{gH}}{L}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (5.35)$$

が得られる。 $A(x, t) = \exp\{i(kx - \sigma t)\}$  の形を考え、上の  $\lambda$  を用いると、

$$\eta = \eta_0 e^{i(kx - \sigma t)} \cos \frac{n\pi}{L} y, \quad \sigma = \pm \sqrt{gH \left( k^2 + \left( \frac{n\pi}{L} \right)^2 \right)}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (5.36)$$

が得られる。この場合、境界の影響により、 $y$  方向の構造が決まる。このような可付番無限個の構造のそれぞれをモードと言う。

$n = 0$  (第 0 モード) の波は  $y$  方向に振幅は変化せず、波の位相速度 ( $c = \sigma/k$ ) は波数  $k$  によらず  $\sqrt{gH}$  である。先に述べたように、 $k$  の異なる波を重ね合わせることで、 $x$  方向の  $\eta$  の任意の形状を作ることができる。もし、 $y$  方向に振幅が一定 ( $n = 0$ ) なら、それを形成する各々の成分波はすべて  $\sqrt{gH}$  で進むので、結局、擾乱は形を変えることなく伝播することになる。このような波を非分散の波と言う。

$n \geq 1$  の場合には、位相速度 ( $c = \sigma/k$ ) は  $k$  の関数である。したがって、任意の初期擾乱を考えた場合、その擾乱を構成する成分波の位相速度が異なるため、擾乱は時間とともに変形し、成分波に分裂していく。このような現象を波の分散といい、そのような波を分散性波動と呼ぶ。

なお、 $\sigma$  と  $k$  の関係を分散関係と言う。

問 5.1.5: 上の水路中の  $n = 0$  の波は、前節の無限領域における平面波で  $l = 0$  とすれば得られる。 $n \geq 1$  の波も平面波の解を重ね合わせることによって作ることができるはずである。どのような波の重ね合わせと考えれば良いか。

問 5.1.6: (5.36) に対応する波の流速場を求めよ。さらに、 $n = 0, 1, 2$ 、それぞれの場合に対して、ある時刻での水位分布と水平流速のベクトル場を描け。

問 5.1.7: 水路中の波の振動数  $\sigma$  の  $k$  依存性を、横軸に  $k$ 、縦軸に  $\sigma$  をとって、いろいろな  $n$  について、図示せよ。また、位相速度  $c$  について、同様のことを行え。

問 5.1.8:  $n = 0$  の波の方程式は、

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = 0,$$

の形をしている。

$$\eta(x, t) = \phi_1(x - c_0 t) + \phi_2(x + c_0 t)$$

がこの方程式の解であることを示せ。

問 5.1.9:  $y$  方向の長さ  $L_y$ 、 $x$  方向の長さ  $L_x$  の長方形のプールを考える。このプール内の浅水波の固有振動の解を求めよ。

ヒント:  $\eta = e^{i\sigma t} A(x)B(y)$  という形の解を仮定せよ。

## 5.2 より一般的な場合の水の波

前節では、波長が水深に比べて十分に長い波を考えた。ここでは、この条件をはずして、水の波を考える。なお、波長が非常に短い場合には表面張力も重要となるが、ここでは考えない。

### 5.2.1 定式化と波の解

無限に広い領域での波を考え、波の進行方向に  $x$  軸を取る ( $y$  方向には場は一様であると考える =  $y$  微分はゼロ)。

平均水面を  $z = 0$ 、底は平らでその  $z$  座標を  $-H$  とし、水面の  $z$  座標を  $\eta$  とすれば、境界条件は

$$w = 0 \quad \text{at } z = -H, \quad w = \frac{D\eta}{Dt}, \quad p = p_a \quad \text{at } z = \eta. \quad (5.37)$$

ここで、 $p_a$  は大気圧 (一定)。

圧力、 $p$ 、を静止状態での圧力 (静水圧成分) とそれからのずれに別け、 $p = p_0(z) + p'(x, z, t)$  とすると、密度一定 ( $\rho = \rho_0$ ) なら

$$p_0 = p_a - \rho_0 g z. \quad (5.38)$$

したがって、圧力に関する境界条件は

$$p_0|_{z=\eta} + p'|_{z=\eta} = p_a - \rho_0 g \eta + p'|_{z=\eta} = p_a, \quad (5.39)$$

より、

$$p' = \rho_0 g \eta, \quad \text{at } z = \eta \quad (5.40)$$

と書き換えられる。

線形化された方程式系は、 $p$  の代わりに  $p'$  を用いて書くと

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial x}, \quad (5.41)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial z}, \quad (5.42)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (5.43)$$

上の境界条件も線形化すると、

$$w = 0 \quad \text{at } z = -H, \quad w = \frac{\partial \eta}{\partial t}, \quad p' = \rho_0 g \eta \quad \text{at } z = 0. \quad (5.44)$$

(5.41)–(5.43) から  $u$  と  $w$  を消去すると、

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p'}{\partial z^2} = 0. \quad (5.45)$$

この方程式に  $x$  方向に進む平面波の解

$$p'(x, z, t) = \Phi(z) e^{i(kx - \sigma t)} \quad (5.46)$$

を代入して、 $z = -H$  での条件を満足するように解き、水面の変位を  $\eta = \eta_0 \exp\{i(kx - \sigma t)\}$  とすれば、

$$p' = \frac{\rho_0 g \eta_0 \cosh k(z + H)}{\cosh kH} e^{i(kx - \sigma t)} \quad (5.47)$$

を得る。さらに、 $z = 0$  で、 $w = \partial \eta / \partial t$  の条件を用いることにより、 $\sigma$  が

$$\sigma = \pm \sqrt{gk \tanh kH} \quad (5.48)$$

と決まる。

問 5.2.1: (5.37) の 2 番目の式並びに (5.40) を線形化することにより、 $z = 0$  での条件 ((5.44) の後の 2 つの条件式) を導出せよ。

問 5.2.2: (5.45) を導出せよ。

問 5.2.3:  $z = -H$  での境界条件を  $\Phi$  に関するものを書き換え、(5.47) を導出せよ。

問 5.2.4: (5.48) を導出せよ。

問 5.2.5:  $u$  と  $w$  を求めよ。



### 5.2.2 浅水波、深水波、分散性

波長が水深に比べて十分に長いという条件、 $kH \ll 1$ 、を用いると、上の波は §5.1 で論じた浅水波になる。他方、水深に比べて波長が十分に短いという条件、 $kH \gg 1$ 、を用いると、

$$p' = \rho_0 g \eta_0 e^{kz} e^{i(kx - \sigma t)} \quad (5.49)$$

$$\sigma = \pm \sqrt{gk} \quad (5.50)$$

を得る。この極限の波を深水波という。例えば、4000m の水深の海洋上での、波長数 10m の波 (うねり) はこの分散関係従う。この場合、流体粒子の軌跡は円を描く。波長が長くなる (水深が浅くなる) にしたがって、軌道が水平方向に伸び、浅水波では、ほとんど水平運動になる。

分散関係 (5.48) より、位相速度は

$$c = \pm \sqrt{\frac{g}{k} \tanh kH} . \quad (5.51)$$

したがって、波長が短いほど、波の位相速度は遅くなる。すなわち、分散性がある。ここで、この水の波を例にとって、分散性について考えてみる。先に述べたように、 $k$  の異なる波をたくさん重ね合わせるにより、任意の形状の擾乱を作ることができる。分散性がある場合には、成分波間の位相速度の違い故、その形が、そのまま進むことはできない。一般論はそう易しくはないが、擾乱を構成する波数の幅が十分に狭い場合には、議論は比較的容易である。ここでは、簡単のために振幅は同じだが、波数  $k$  が少し異なる二つの波が重なっている状況を考えよう。

$$\eta(x, t) = \eta_0 \sin(k_1 x - \sigma_1 t) + \eta_0 \sin(k_2 x - \sigma_2 t) . \quad (5.52)$$

ここで、 $\sigma_j = \sigma(k_j)$ ,  $j = 1, 2$ , である。この式を書き直すと、

$$\eta(x, t) = 2\eta_0 \cos \frac{1}{2}(\Delta k x - \Delta \sigma t) \sin(\bar{k} x - \bar{\sigma} t) . \quad (5.53)$$

ここで、 $\Delta k = k_1 - k_2$ ,  $\Delta \sigma = \sigma_1 - \sigma_2$ ,  $\bar{k} = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$ ,  $\bar{\sigma} = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2)$  である。(5.53) は  $\bar{k}$  の波数と  $\bar{\sigma}$  の振動数を持つ波があり、その振幅が  $2\eta_0 \cos \frac{1}{2}(\Delta k x - \Delta \sigma t)$  で変化するような状況 (ビート) を表している。式より、個々の波の峰 (谷) は  $\bar{\sigma}/\bar{k}$  で動くが、振幅の包絡線自体は、 $\Delta \sigma/\Delta k$  で動くことが分かる。もし、 $\Delta k \rightarrow 0$  の極限を取れば、この振幅の包絡線の伝播速度は

$$c_g = \frac{\partial \sigma}{\partial k} \quad (5.54)$$

と書ける。これを群速度という。深水波の場合、 $\sigma = \pm\sqrt{gk}$  なので、 $c_g = \pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{k}} = \frac{1}{2}c$  となる。これは、個々の波の峰の伝播速度の半分（ $c$ ）の速度で振幅の包絡線は伝播するということである。水の波の群速度は、 $kH$  がゼロの極限を除けば、常に  $|c_g| < |c|$  なので、個々の波の峰は包絡線の中を振幅を変えながら包絡線よりも速く進むことになる。

ここでは2つの波の重ね合わせを考え、波数  $k$  の波の振幅が三角関数型に空間分布する形を得たが、波数の近い多数の波を重ね合わせれば、任意の振幅分布を作り出すことが可能である。一般に、波の振幅が、波長や周期よりもずっとゆっくりとした時空間スケールで変化し、その波の存在領域が空間的に限られているとき、それを波群、もしくは、波束と言ひ、その波群の伝播速度は、波の種類によらず  $c_g = \partial\sigma/\partial k$  になる。振幅の二乗は波のエネルギーを表すので、群速度は波のエネルギーが伝わる速度とも言える。なお、波自体はある限られた領域で有限の時間内に励起される（深水波であれば、低気圧による暴風などによる）と考えられるので、有限の長さの波群の形をとるのが普通である。

ここまでは一次元であったが、 $x$  方向の波数が  $k$ 、 $y$  方向の波数が  $l$  の場合、 $x$  方向、 $y$  方向、それぞれの群速度は、上と同様に、 $\partial\sigma/\partial k$ 、 $\partial\sigma/\partial l$  と書ける。深水波 ( $\sigma = \sqrt{g|\mathbf{K}|}$ )、ここで、 $\mathbf{K} = (k, l)$  の場合、 $x$  方向の群速度と  $y$  方向の群速度は、それぞれ、

$$c_{gx} = \frac{\partial\sigma}{\partial k} = \frac{k}{2|\mathbf{K}|} \sqrt{\frac{g}{|\mathbf{K}|}}, \quad c_{gy} = \frac{\partial\sigma}{\partial l} = \frac{l}{2|\mathbf{K}|} \sqrt{\frac{g}{|\mathbf{K}|}},$$

となる。これは、波数ベクトルの方向を向いているベクトル  $\frac{\mathbf{K}}{2|\mathbf{K}|} \sqrt{\frac{g}{|\mathbf{K}|}}$  の  $x$  成分と  $y$  成分である。このように、2次元の場合には群速度はベクトルで、 $c_g = (\partial\sigma/\partial k, \partial\sigma/\partial l)$  である（章末の参考1参照）。なお、ここで扱った水の波では群速度は波数ベクトルの方向を向いていたが、一般には、群速度と波数ベクトルの向きが一致するとは限らない（例としては、章末の参考2、もしくは、11章参照）。

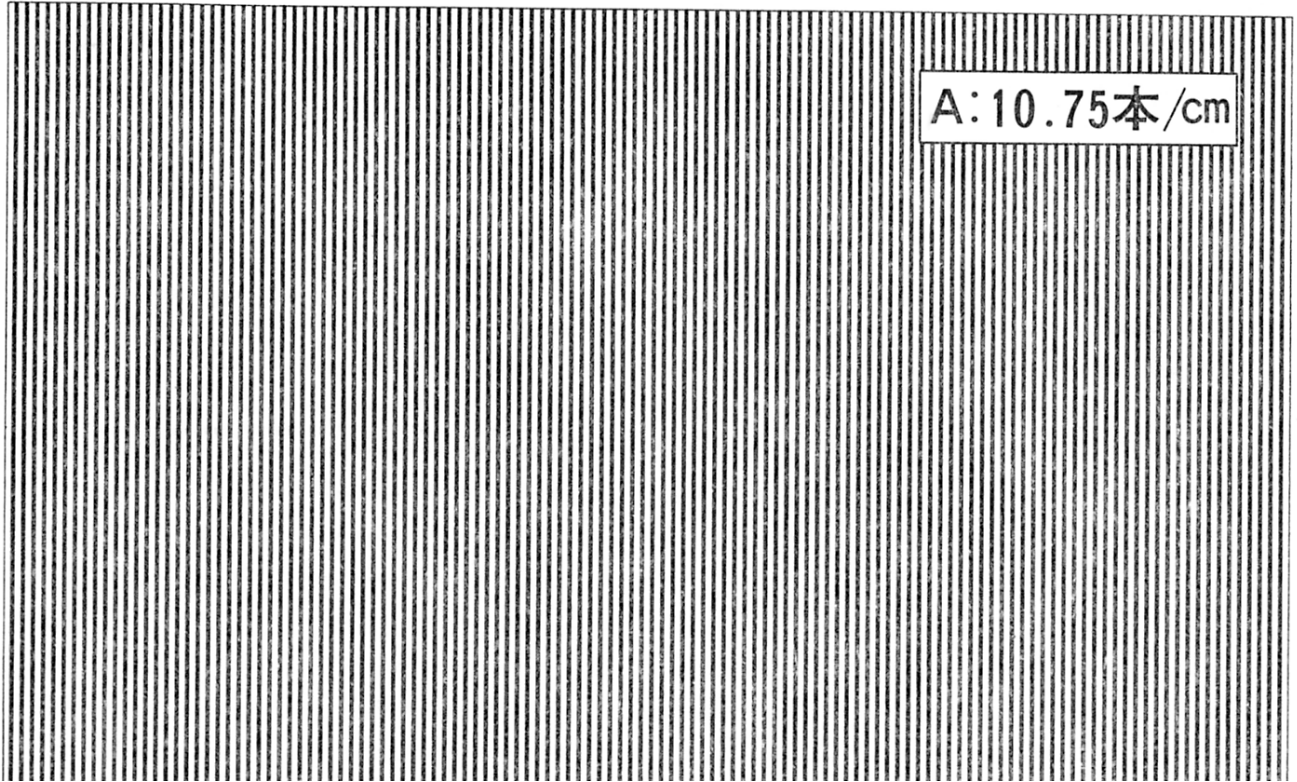
問 5.2.6: §5.2.1 で浅水近似を用いずに導出した波の解が、波長が十分に長いという条件下では、§5.1.2 で得た浅水波に一致することを示せ。また、水深 4000m の海を考えた時、浅水近似が十分な精度（例えば位相速度の誤差が 5%以内）で成り立つためには波長はどの程度以上必要か？ 深水波近似が成り立つためにはどうか？

問 5.2.7: 分散関係 (5.48) から、群速度を計算し、群速度と位相速度を同じ図に記せ。長波極限では群速度と位相速度は一致する。

問 5.2.8: ハワイの大波は南極海から来るといふ話がある。周期 5 秒、距離 10000km とし、波が発生してからハワイに到達するまでのおおよその時間を求めよ。

問 5.2.9: 付録 (木村竜治著「地球流体力学入門」による) を用いて、群速度と位相速度の関係を実感せよ。

## 付録



### 参考 1: 一般的な場合の群速度

一般の定係数の水平 2 次元の線形波動方程式を

$$L(\partial/\partial t, \partial/\partial x, \partial/\partial y)\phi = 0 \quad (5.55)$$

と表すことにする。ここで、平面波の解  $\phi = e^{i(kx+ly-\sigma t)}$  を代入すれば、

$$L(-i\sigma, ik, il) = 0 \quad (5.56)$$

となり、これが分散関係を表す。さて、ここで、 $\phi = A(x, y, t)e^{i(kx+ly-\sigma t)}$  という振幅が変化する解を代入すると、(5.56) の代りに、

$$L(-i\sigma + \partial/\partial t, ik + \partial/\partial x, il + \partial/\partial y)A = 0 \quad (5.57)$$

が得られる。振幅  $A$  の変動の時空間スケールが  $e^{i(kx+ly-\sigma t)}$  で表される波動部分より十分に大きい、すなわち、 $|\sigma A| \gg |\partial A/\partial t|$  等が成り立つならば、展開できて、高次項を無視すると近似的に、

$$L(-i\sigma, ik, il)A + i \left\{ \frac{\partial L}{\partial \sigma} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial L}{\partial k} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial l} \frac{\partial}{\partial y} \right\} A = 0 \quad (5.58)$$

と書ける。 $(k, l, \sigma)$  を分散関係 (5.56) を満足するように選べば、2つの項それぞれがゼロになり、第2項より

$$\frac{\partial A}{\partial t} - \frac{\partial L/\partial k}{\partial L/\partial \sigma} \frac{\partial A}{\partial x} - \frac{\partial L/\partial l}{\partial L/\partial \sigma} \frac{\partial A}{\partial y} = 0 \quad (5.59)$$

が得られる。 $(\partial L/\partial k)/(\partial L/\partial \sigma) = -\partial \sigma/\partial k$ ,  $(\partial L/\partial l)/(\partial L/\partial \sigma) = -\partial \sigma/\partial l$  であるから、(5.59) は  $c_g = (c_{gx}, c_{gy}) = (\partial \sigma/\partial k, \partial \sigma/\partial l)$  とすれば、

$$\frac{\partial A}{\partial t} + c_{gx} \frac{\partial A}{\partial x} + c_{gy} \frac{\partial A}{\partial y} = 0 \quad (5.60)$$

と書ける。この式より解は  $A = \Phi(x - c_{gx}t, y - c_{gy}t)$  の形になること、すなわち、波群の振幅、 $A$ 、が  $c_g$  で伝播することが分る。なお、3次元空間を伝播する波動も全く同じで、 $z$  方向の波数を  $m$  とすると、群速度の  $z$  成分は  $c_{gz} = \partial \sigma/\partial m$  となる。

## 参考 2: 内部重力波

この節では、水面波について説明をした。大気には水面は存在しないが、内部的な密度成層も同じような波動を可能にする。そのような成層した流体中の等密度面の変位に働く浮力(重力)を復元力とする波動を内部重力波という。海洋も成層流体なので、もちろん海洋中にも内部重力波は存在する。

ここでは、非圧縮断熱流体を考え、密度を

$$\rho(x, y, z, t) = \rho_0 + \bar{\rho}(z) + \rho'(x, y, z, t)$$

と置き、かつ、簡単化のために  $\rho_0 \gg |\bar{\rho}| \gg |\rho'|$  と仮定する。ここで、 $\rho_0$  は定数である。線形化された方程式は、

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial y} \quad (5.61)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\rho'}{\rho_0} g \quad (5.62)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \rho'}{\partial t} + w \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial z} = 0 \quad (5.63)$$

(5.61) を  $z$  で微分したものに (5.62) を  $x$  で微分したものと  $y$  で微分したものを代入して、 $p$  を消去し、それらの式と非圧縮の連続の式 ((5.63) の第 1 式) を用いて、 $u, v$  を消去し、最後に、密度の保存式を ((5.63) の第 2 式) を用いて、 $\rho'$  を消去すると  $w$  に関する以下の式を得る。

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] w + N^2 \left[ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right] w = 0 \quad (5.64)$$

ここで、 $N$  は浮力振動数 (Brunt-Väisälä frequency: 中立ブイを上下に振動させたときの振動数)、

$$N^2 = -\frac{g}{\rho_0} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial z}$$

である。以下では、簡単化のために  $N = \text{一定}$  の場合を考える。

静止状態で高さ  $z$  にある密度面の鉛直方向の変位を  $\eta(x, y, z, t)$  としたとき、 $w = \partial \eta / \partial t$  なので、密度面変位を用いて (5.64) を書き直すと、

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \eta + N^2 \left[ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right] \eta = 0 \quad (5.65)$$

とも書ける。

[鉛直モード]

$z = 0$  に底が、 $z = H$  に天井があるような流体を考えると、 $z = 0, H$  で  $\eta = 0$ 、かつ、 $N = \text{一定}$  なので、 $\eta$  は鉛直モード

$$\eta = \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n(x, y, t) \sin \frac{n\pi z}{H}$$

に分解出来、(5.65) は

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \left( \frac{n\pi}{H} \right)^2 \right] \eta_n + N^2 \left[ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right] \eta_n = 0 \quad (5.66)$$

となる。 $\eta_n$  として波動解  $\eta_n = \eta_{n0} e^{i(kx+ly-\sigma t)}$  を考えると、

$$\sigma^2 = \frac{N^2 |\mathbf{K}_h|^2}{|\mathbf{K}_h|^2 + (n\pi/H)^2}$$

を得る。ここで、 $\mathbf{K}_h$  は水平波数ベクトル ( $= (k, l)$ )。特に水平スケールが鉛直スケールに比べて十分に大きい時には (浅水近似の下では)、 $\partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2 \ll (n\pi/H)^2$  なので、(5.66) は

$$\frac{\partial^2 \eta_n}{\partial t^2} + \frac{N^2 H^2}{n^2 \pi^2} \left[ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right] \eta_n = 0 \quad (5.67)$$

となり、 $H_n = N^2 H^2 / gn^2 \pi^2$  と置けば、位相速度は  $\pm \sqrt{g H_n}$  で、浅水波と同じ形になる。この  $H_n$  を等価水深と呼ぶ。 $n$  番目のモードだけに着目すれば、水深  $H_n$  の浅水系と同じという意味である。

[平面波・鉛直伝播]

鉛直方向にも領域が無限である場合には平面波  $\eta = \eta_0 e^{i(kx+ly+mz-\sigma t)}$  が解になる。これを (5.65) に代入すると

$$\sigma = \pm \frac{N|\mathbf{K}_h|}{|\mathbf{K}|}$$

を得る。ここで、 $\mathbf{K}$  は 3 次元の波数ベクトル ( $= (k, l, m)$ ) である。群速度  $\mathbf{c}_g$  は、 $\sigma$  を  $(k, l, m)$  で微分することにより、

$$\mathbf{c}_g = \pm \frac{Nm}{|\mathbf{K}|^3} \left( m \frac{\mathbf{K}_h}{|\mathbf{K}_h|} - |\mathbf{K}_h| \hat{z} \right)$$

となる。ここで、 $\hat{z}$  は鉛直上向の単位ベクトルである。 $\mathbf{K} \cdot \mathbf{c}_g = 0$  なので、群速度は波数ベクトル (位相速度の方向) と直交することが分かる。波のエネルギーが上方に伝わる時、すなわち、波源が下方にあるときには、波の位相は下方に伝わる。これは一見不思議に見えるかも知れないが、別に不思議なことではない。内部波でもある密度面に着目すればその密度面の変位が水平に伝播するだけである。水平に伝播する密度面変位の影響がどのように鉛直方向に伝わるか考えれば良い。密度面の変位が  $+x$  方向に移動したとき、その少し上の流体に着目すると、その変位の峰の  $+x$  方向側の流体が押されることになる。したがって、峰よりも  $+x$  側に流体がたまり、その上の密度面を上へ押し上げる。すなわち、下から上に影響が及ぶときには、上の密度面の方が位相が少し先に進むことになる。これを 3 次元の波数ベクトルで見れば、斜め下向きになる。

問 5.A2.1:  $l = 0$  とし、波数ベクトル、群速度ベクトル並びに等密度面の高さ分布 ( $z + \eta(x, y, z)$  の  $z$  を固定したときの線) を重ねて描き、波の鉛直伝播と位相の関係について論ぜよ。

# Chapter 6

## 粘性流体

ここまでの議論では粘性散逸は無視してきた。例えば、蜂蜜やらシロップやらグリセリンやらはドロツとしている。このドロが粘性である。蜂蜜の中に箸を垂直に入れ、水平に動かすと、箸の回りの蜂蜜は箸を動かした方へ動く。この幅が、粘性の働いているおおよその距離を表す。この幅は箸を動かす速度に依存する。水に箸を入れ同様に動かしたときには、この幅は非常に狭い。すなわち水の粘性は小さい。大気や海洋の大規模なスケールを考える時には、この幅はその現象のスケールに比して無視できる。しかし粘性がなければ、先に述べたように、渦は不生不滅である。波においても、我々が海で良く見る波は風によるが、もし、海面での摩擦がなければ、おそらくそのような形では波は起きない。また、粘性がなければ、流体の運動に伴うエネルギーは保存する。したがって、何らかの形で運動が引き起こされれば、それは、そう簡単には消えない。

### 6.1 粘性流体の方程式

粘性は面に働く力、すなわち、応力である。ある一つの面に対して力の働く方向が3つあるので、これは $3 \times 3$ のテンソルになる。この力は、流速が空間的に分布している場合のみ働く。したがって、流速の空間微分の関数であると考えられる。水や空気のようにさらさらした流体では、線形関数であると考えて良く（ニュートン流体という）、粘性応力テンソルの形は理論的に定まる。圧縮性があまり効かないと仮定すれば、方程式は、

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p - \nabla\phi + \nu\nabla^2\mathbf{v} \quad (6.1)$$

となる。この式はナビエ-ストークス (Navier-Stokes) 方程式と呼ばれる。ここで、 $\nu$  は動粘性係数 (もしくは動粘性率)。また、 $\mu = \rho\nu$  を粘性係数もしくは粘性率という。 $\nu$  は、温度と圧力の関数であるが、1気圧、20°Cの空気では、 $1.5 \times 10^{-1} \text{cm}^2/\text{s}$ 、水では、 $1.0 \times 10^{-2} \text{cm}^2/\text{s}$  である。

この粘性項の形について少し考えてみよう (なお、以下の議論は定性的なものである。正しい理論展開については流体力学の教科書参照のこと)。流体粒子を各辺の長さが  $\Delta x, \Delta y, \Delta z$  の微小な直方体と考える。流れの向きは  $x$  方向であるとする。鉛直座標  $z = z_0$  を中心の  $z$  座標とする直方体に及び、その上の流体 ( $z = z_1 = z_0 + \Delta z$  を中心の  $z$  座標とする直方体の集まり) とその下の流体 ( $z = z_{-1} = z_0 - \Delta z$  を中心の  $z$  座標とする直方体の集まり) の影響を考える。 $z = z_0$  にある直方体の速度を  $u_0$ 、 $z = z_1, z = z_{-1}$  の直方体の速度をそれぞれ、 $u_1, u_{-1}$  とする。直方体は互いに接しており、その面での摩擦応力は、直方体の速度の差に比例するとする。そうすると、 $z = z_0$  にある直方体の上面に働く  $x$  方向の力は  $\Delta x \Delta y \kappa (u_1 - u_0)$ 。ここで、 $\kappa$  は摩擦を表す比例定数。直方体の下面に働く力は、同様に、 $\Delta x \Delta y \kappa (u_{-1} - u_0)$ 。したがって、上面と下面を擦られることにより、この箱に働く正味の力は、

$$\Delta x \Delta y \kappa \{ (u_1 - u_0) + (u_{-1} - u_0) \} . \quad (6.2)$$

この直方体に働く力がこの摩擦だけだとすると、この直方体の運動方程式は、密度を  $\rho$  として、

$$\rho \Delta x \Delta y \Delta z \frac{Du_0}{Dt} = \Delta x \Delta y \kappa \{ (u_1 - u_0) + (u_{-1} - u_0) \} . \quad (6.3)$$

両辺を質量で割ると、

$$\frac{Du_0}{Dt} = \frac{\kappa}{\rho} \left\{ \frac{(u_1 - u_0)}{\Delta z} - \frac{(u_0 - u_{-1})}{\Delta z} \right\} . \quad (6.4)$$

直方体の速度、 $u_1, u_0, u_{-1}$  を  $z_1, z_0, z_{-1}$  での速度とし、速度の差を微分に置き換えれば、

$$\simeq \frac{\kappa}{\rho} \left\{ \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=z_0+\Delta z/2} - \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=z_0-\Delta z/2} \right\} \simeq \frac{\kappa}{\rho} \Delta z \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \Big|_{z=z_0} . \quad (6.5)$$

となる。流体は連続体なので、力が箱の大きさに依存するはずはなく、それ故、係数を  $\nu = \frac{\kappa}{\rho} \Delta z$  と置けるであろう。 $y = y_0 \pm \Delta y/2$  の面についても同様であり、また、 $x = x_0 \pm \Delta x/2$  の面に関しても、摩擦という概念からは少し奇異に見えるかも知れないが、(流れが  $x$  方向からずれている場合を考えれば) 等方性から、同様に書けることが分かる。結局、摩擦による  $x$  方向の力は、単位質量当り

$$\nu \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right\} \quad (6.6)$$

と (6.1) にあるようになる。

粘性を考慮した場合には、方程式の微分の階数が一つ増える。したがって、壁面における境界条件は、流速の法線成分がゼロというだけでは足りなくなる。粘性流体は現実の流体である。実際に何が起きるかといえば、壁面に接している流体を構成する分子と壁面



を構成する分子との間で分子間力が働き、壁面においては、法線成分のみではなく、壁面に沿う方向の流速もゼロになる。これで、境界条件が閉じる。

問 6.1.1: 粘性流体の運動エネルギーの式。密度一定 ( $\rho = \rho_0$ ) として、粘性項がある場合についての運動エネルギーの式を導け。この場合外力がなくとも運動エネルギーは保存しない。そのことを示せ。(問題 2.3.4 参照)。

## 6.2 Reynolds の相似則

密度一様、もしくは、順圧流体 ( $\rho = \rho(p)$  と書ける流体) を考える。この場合、圧力関数  $P = \int (1/\rho) dp$  が導入でき、Navier-Stokes 方程式 (6.1) は

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\nabla P' + \nu \nabla^2 \mathbf{v} \quad (6.7)$$

と書ける。ここで、 $P' = P + \phi$  であり、これは静水圧からのずれを表わす。順圧流体では、重力は運動方程式は入ってこない。この方程式を、代表的な長さ  $L$ 、速さ  $U$  を用いて無次元化する。

$$(x_*, y_*, z_*) = L^{-1}(x, y, z), \quad t_* = UL^{-1}t, \quad \mathbf{v}_* = U^{-1}\mathbf{v}, \quad P_* = U^{-2}P'. \quad (6.8)$$

ここで、\* は無次元量を表す。そうすると (6.7) は

$$\frac{D\mathbf{v}_*}{Dt_*} = -\nabla_* P_* + \frac{1}{Re} \nabla_*^2 \mathbf{v}_* \quad (6.9)$$

と書ける。ここで、

$$Re = \frac{UL}{\nu} \quad (6.10)$$

は Reynolds 数と呼ばれる無次元パラメータ。(6.9) は  $Re$  が同じで、無次元量に対する境界条件と初期条件が同じなら、解が同じになるということを意味する。例えば、直径  $L$  の円柱が立っており、風上での風速を  $U$  としたとき、その円柱の回りの(円柱の影響を受けた)風の変化は、 $UL$  が等しければ、 $U$  と  $L$  がどのような値をとっても同じになるということである。これを Reynolds の相似則という。

前節までの完全流体では、もし、自由表面(水面)などは存在せず、かつ、保存力場で、順圧であれば、実は固有のスケールというものはない。したがって、その場合には、常に解は相似だったわけである。ここでは、粘性という物性定数が入ってきたため、もの的大小によって、現象は違って来る。しかし、その場合にも Reynolds 数さえ一致すれば、同じになる。Reynolds 数は非線形項と粘性項の大きさの比である。すなわち、Reynolds

数が大きいということは、粘性に比べて非線形項が大きいということを意味する。両者の相対的な重要性が同じならば現象は同じになるわけである。ここでは単一の無次元量で記述できる系を見たが、状況によっていろいろな無次元パラメータがでてくる。例えば、上流での流速が時間的に振動する場合、その振動周期  $T$  と移流時間スケール  $(L/U)$  との比、 $S = L/UT$ 、が入ってくる。この無次元量は Strouhal 数と呼ばれる。この場合には、Reynolds 数と Strouhal 数が同じであれば、大きさや周期がまるっきり違っていても現象は同じになる。大気や海洋は、実スケールが非常に大きく、通常考えれば実験室で再現することは不可能である。しかし、このような相似性の思想に基づき (全ての無次元パラメータを実際に一致させることはできないが、後述する渦粘性等も入れて) 大気や海洋の大規模現象を小さな回転水槽で再現し、調べるといふ研究も多くなされてきている。

地球流体に限らず、流体の挙動を実験的に調べる際には、無次元化は重要である。上の円柱を過ぎる流れの例では、何も考えないと、解は  $U$  と  $L$  と  $\nu$  という3つのパラメータに依存しそうであるが、無次元化することにより、実は、単一のパラメータである、Reynolds 数によって、その挙動は完全に決定されることが分かる。また、解がどのような無次元パラメータに依存するかを考えることは、その物理的実体を捉える上での助けにもなる。

問 6.2.1: 直径 1m の円柱の回りでの気流を調べたい。これを実験的に調べるために水を満たした水槽の中に直径 10cm の円柱を入れた。風の強さが 1m/s の場合を水槽の中で再現するには、水をどれだけの速さで流す必要があるか?

## 6.3 粘性流体のいくつかの解

流れが一方向で、その方向には変化がないという簡単な場合の解を示す。

### 6.3.1 速度差を持つ2枚の平板の間の流れ

無限に広い2枚の平行な板に挟まれた流れを考える。板に直交する方向に  $z$  軸を取る。2枚の板の距離を  $h$  とする。下の板 ( $z = 0$ ) を静止させて、上の板を速度  $U$  で  $x$  方向に動かした。そのときの速度分布はどうなるであろうか? ( $x, y$ ) 方向には場は一様である。また、平板に挟まれているので、 $w = 0$ 。したがって、(6.1) は

$$\nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \quad (6.11)$$

となる。 $u = 0$  at  $z = 0$ 、 $u = U$  at  $z = h$  の下に解けば、

$$u = U \frac{z}{h} \quad (6.12)$$

となる。これを (平面)Couette flow (クエットの流れ) という。

この場合、上面の板で水を擦ることにより水に運動量が与えられる。与えられた運動量は粘性応力により下方に伝わり、下面の板に吸い込まれていく。運動量の流れ (運動量フラックス) は存在するが、その収束発散がないため、流れは定常になる。

問 6.3.1: Couette の流れにおける力学的エネルギーの流入と散逸について述べよ。散逸した分は熱に変わる。

### 6.3.2 円管の中の流れ

半径  $a$  の円管の中の流れを考える。円管の長さを  $L$  とし、円管の両側に圧力差  $\Delta p$  を与えた。  $L \gg a$  ならば、円管の中の圧力の傾きは円管の端近くを除けば、場所によらず一定であると考えられる。円管の軸方向を  $x$  とするときの圧力傾度力、  $dp/dx$  を一定 ( $= -\rho_0\alpha$ ) として、流れを求めてみる。(6.1) は

$$\nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -\alpha \quad (6.13)$$

となる。(  $y, z$  ) の代わりに極座標 (  $r, \theta$  ) を持ちいると、

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{du}{dr} \right) = -\frac{\alpha}{\nu}. \quad (6.14)$$

一般解は

$$u = -\frac{\alpha}{4\nu} r^2 + A \ln r + B. \quad (6.15)$$

$r = 0$  (中心軸) で、  $u$  は有限であるから、  $A = 0$ 。また、  $r = a$  で  $u = 0$  であるから、結局、

$$u = \frac{\alpha}{4\nu} (a^2 - r^2) \quad (6.16)$$

となる。これを Hagen-Poiseuille flow (ハーゲン・ポアズイユの流れ)、もしくは、Poiseuille flow (ポアズイユの流れ) という。

問 6.3.2: Hagen-Poiseuille の流れで、円管の中を流れる流量を求めよ。

問 6.3.3: 容器に水を入れ、孔を開け、孔に水平に長さ 1m、内径 2mm のパイプを取りつけた。パイプの一方の端には大気圧がかかっている。孔は水面より 1m 下にあるとする (水面にも大気圧がかかっている)。1 秒間に出てくる水の量 (流量) を求めよ。

問 6.3.4: Hagen-Poiseuille の流れにおける Reynolds 数を円管の直径と平均流速を用いて表せ。問 6.3.3 での Reynolds 数はいくらか?

### 6.3.3 振動平板による流れ

流体中に無限に広い平板を沈め、それを横方向に  $\omega$  で振動させた。板に直交する方向に  $z$  軸を取り、板を振動させる方向を  $x$  とする。方程式は

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}. \quad (6.17)$$

境界条件は

$$u \rightarrow 0 \quad \text{as } z \rightarrow \infty, \quad u = U \cos \omega t \quad \text{at } z = 0 \quad (6.18)$$

である。解は

$$u = U e^{-z/\delta} \cos(\omega t - z/\delta), \quad \delta = \sqrt{2\nu/\omega} \quad (6.19)$$

となる。振動板の影響は、減衰しながら  $z$  方向に伝わる。この板の振動の影響が現れる  $\delta$  の領域を境界層、 $\delta$  を境界層の幅という。ここでは、板を動かしたが、何らかの理由で流体が振動する場合 (例えば波が水面に立っているときの底) にも境界層が生じる。

問 6.3.5: (6.19) を求めよ。

## 6.4 Reynolds 応力と渦粘性

Reynolds 数が大きいということは、粘性はあまり重要ではないということである。もし、大気海洋の代表的な流速と空間スケールを用いて、Reynolds 数を計算すれば、天文学的な数値になる。すなわち、粘性は直接的には現象に影響を与えない。しかし、粘性がなければ、先に述べたようにいろいろな不都合が生じる。すなわち、大規模な現象から、何らかの方法で、粘性が効くようなスケールにエネルギーが輸送され、散逸が起きているはずである。

前節の円管の中の流れで圧力差を大きくしていくと、Reynolds 数は大きくなっていく。圧力傾度力と流量の関係は Reynolds 数が 1000 程度までは、ほぼ問 6.3.2 に従う。しかし、ある値より大きくなると、急に従わなくなる。この時の Reynolds 数を臨界 Reynolds 数という。臨界 Reynolds 数を越えると、Hagen-Poiseuille の流れに比べ、圧力の増大に対する流量の増大率が減少し、あたかも粘性が増えたかのように見える。これは、Hagen-Poiseuille flow (層流) が不安定化し、乱れた流れ (乱流) に遷移することによって生じる。すなわち、§6.3.2 では、流れは  $x$  方向に一様でかつ定常と考えていたが、 $x$  方向に非一様でかつ時間的にも変化する流れに変わったことによる。このような層流から乱流への遷移は円管の中の流れに特有なものではない。

この乱れの正体は渦である。粘性というのは、流体中の運動量を混ぜて均一にするものと考えられる。他方、渦もまたものを混ぜる。例えば、コーヒーにミルクを入れたときにミルクを混ぜるために我々はスプーンでコーヒーをかき混ぜる。これは渦を作っているということである。円管の中の流れの場合、渦がたくさん出来ると、円管の中心部から内壁の方へ渦によって運動量が輸送され、円管中心部での流速が減少する（そして、内壁近くに強いシアが出来、より多くの運動量が円管に移される）。そこで、「渦粘性」という概念が生じる。それは、大気海洋中にはいろいろなスケールの渦が存在し、ある特定のスケールの現象（渦かも知れない）に対しては、それよりも小さな渦が粘性の役割を果たしているというものである。

我々の見たい現象の長さスケールを  $L$ 、時間スケールを  $T$  とする。そのスケールよりも距離的に、あるいは、時間的にずっと短い現象（そのスケールを  $L', T'$  とする）が、我々の見たい現象の上に重なっていたとする。  $u, v, w, p$  を我々の見たいスケールの現象を表すもの、  $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}, \bar{p}$ 、とそれよりも小さい（短い）スケールを表すもの、  $u', v', w', p'$ 、に分ける。この場合、  $L$  よりも短く  $L'$  よりも長い空間、もしくは、  $T$  よりも短く  $T'$  よりも長い時間スケールで平均すると、  $u', v', w', p'$  はゼロになり、  $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}, \bar{p}$  は変わらないと考える。しかし  $\overline{u'v'}$  等は一般にはゼロにならない（例えば、  $\sin \sigma t$  は時間平均するとゼロになるが  $\sin \sigma t \times \sin \sigma t$  は平均してもゼロにはならない）。それ故、非線形項を通して、スケールの小さな現象の影響が見たいスケールの方程式の中にはいつてくる。例えば、運動方程式の  $x$  成分は平均操作によって

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \overline{u'u'} - \frac{\partial}{\partial y} \overline{u'v'} - \frac{\partial}{\partial z} \overline{u'w'} \quad (6.20)$$

となる。ここで、 $\bar{\ast}$  は  $\ast$  の平均を表す。なお、 $\nu$  を含む項は無視した。  $-\overline{u'v'}$  等に  $\rho$  をかけた  $-\rho \overline{u'v'}$  等を Reynolds 応力という。  $\overline{u'v'} > 0$  ということは、平均より  $u$  が大きな ( $u' > 0$  の) 流体が正の  $v'$  によって  $+y$  方向に運ばれ、逆に、平均よりも  $u$  の小さな流体が  $-y$  方向に運ばれることを意味する。したがって、もし、  $\overline{u'v'}$  が  $+y$  方向に行くにしたがって小さくなっている ( $\frac{\partial}{\partial y} \overline{u'v'} < 0$ ) ならば、平均より大きな  $u$  を持つ流体が収束することになり、そこに  $+x$  方向に加速が起きることになる。

Reynolds 応力が計算できれば、その収束発散による加速が計算できる。しかし、Reynolds 応力を計算するためには、  $u', v', w'$  等を計算しなければならず、さらに、それらを計算するためには、より小さい現象を含める必要が出てくる。それはあまりには大変なので、このような小さいスケールの不規則な運動を、例えば、

$$-\frac{\partial}{\partial x} \overline{u'u'} - \frac{\partial}{\partial y} \overline{u'v'} - \frac{\partial}{\partial z} \overline{u'w'} = \frac{\partial}{\partial x} 2A_H \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} A_H \left( \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( A_H \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} + A_V \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right) \quad (6.21)$$

といった風に、我々の見たいスケールの諸量に関係づける場合が多い。 $A_H$ 、 $A_V$  は渦粘性係数と呼ばれる ( $A_H$  は水平渦粘性係数、 $A_V$  は鉛直渦粘性係数)。この記述の物理的解釈は、例えば以下のようにされる。 $\bar{u}$  が  $y$  方向に分布を持っていたとする。この平均流が  $y$  方向に動くことによって  $u'$  が生じると仮定すると  $u' = -l'_y \partial \bar{u} / \partial y$  といった表記が可能であろう。ここで、 $l'_y$  は渦による流体の  $\pm y$  方向の移動距離を表す。そうすると  $\overline{v'u'} \simeq -\overline{v'l'_y} \partial \bar{u} / \partial y$  という形になる。他方、平均流  $\bar{v}$  が  $x$  方向に構造を持っているとすると、 $\bar{v}$  の方程式の右辺に現れる  $\overline{u'v'}$  は同様に、 $\overline{u'v'} \simeq -\overline{u'l'_x} \partial \bar{v} / \partial x$  となる。 $\bar{u}$  の式 (6.20) でも  $\bar{v}$  の式でも  $\overline{u'v'}$  は同じでなければいけなければならない、それ故、 $-\overline{u'v'} \simeq \frac{1}{2}(\overline{v'l'_y} \partial \bar{u} / \partial y + \overline{u'l'_x} \partial \bar{v} / \partial x)$ 。さらに乱流場は等方的である、すなわち、 $\overline{v'l'_y} = \overline{u'l'_x} = 2A_H$ 、とすれば、(6.21) の右辺第 2 項が得られる。他の項も同様である。

$v'$ 、 $u'$  が渦の流速スケールだと思えば、渦粘性係数は渦の大きさとその流速によって与えられるということになる。大気海洋の大規模現象に関しては、水平渦と鉛直渦ではスケールが一般に異なるので、 $A_H$ 、 $A_V$  は異なる値を持つ。もし、 $A_H$ 、 $A_V$  が、それぞれ、空間的に一様なら (さらに非圧縮を仮定すれば)、分子粘性と同様に

$$-\frac{\partial}{\partial x} \overline{u'u'} - \frac{\partial}{\partial y} \overline{u'v'} - \frac{\partial}{\partial z} \overline{w'u'} = A_H \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + A_H \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} + A_V \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2} \quad (6.22)$$

となる。ただし、これは分子粘性からのアナロジーによるもので、現実が必ずこのような表現に従うとは限らない。しかし、本節での分子粘性に関する議論は、分子粘性に比べてずっと大きな渦粘性係数に置き換えることにより、大規模現象にもある程度適用できることを意味する。

問 6.4.1: 海面での流速が 1m/s、水深 500m で流速がゼロになるような流れがあったとする。Reynolds 数はどれぐらいになるか? また、この分子粘性項と時間変化項が釣り合うためには、10 日間での流速の変化はどれぐらいになるか? また、鉛直流による移流  $w \frac{\partial u}{\partial z}$  が分子粘性項と同程度の大きさを持つとしたとき、 $w$  はどれぐらいになるか?

問 6.4.2: (6.20) を導出せよ。

問 6.4.3: (6.21) で  $A_H$ 、 $A_V$  一定として、(6.22) を導出せよ。

問 6.4.4:  $u'(t) = a \cos \sigma t$ ,  $v'(t) = b_1 \cos \sigma t + b_2 \sin \sigma t$  という流れの変動成分を考える。 $\overline{u'v'} \neq 0$  となるためにはどうあれば良いか。 $\overline{u'v'}$  が正負それぞれの時の代表的な軌道  $((u', v')$  面上でのホドグラフ) を図示せよ。

問 6.4.5: (6.20) は  $\overline{u'v'}$  が  $y$  方向に変化していると  $\bar{u}$  を変化させることを意味する。上の問 6.4.4 のような  $u', v'$  を考え、 $a, b_1, b_2$  が  $y$  の正の方向に緩やかに減少していたとする。 $x$  方向に加速が起きる ( $\partial\bar{u}/\partial t > 0$ ) のはどのような場合か。

### 参考: 粘性応力テンソル

流体要素が時間的にどのように変形したり回転するかは流速分布による。そして、それは流速ベクトルの勾配を取った速度勾配テンソル  $D$  によって表わされる。

$$D = \begin{pmatrix} \partial_x u & \partial_y u & \partial_z u \\ \partial_x v & \partial_y v & \partial_z v \\ \partial_x w & \partial_y w & \partial_z w \end{pmatrix}$$

ここで、 $\partial_x, \partial_y, \partial_z$  は  $x, y, z$  による偏微分を表わす。 $D$  を対称部分と反対称部分に分けると

$$D = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2\partial_x u & \partial_x v + \partial_y u & \partial_z u + \partial_x w \\ \partial_x v + \partial_y u & 2\partial_y v & \partial_y w + \partial_z v \\ \partial_z u + \partial_x w & \partial_y w + \partial_z v & 2\partial_z w \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix}$$

となる。反対称部分 (第 2 項) の  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$  は渦度ベクトルの  $x, y, z$  成分であり、この部分は流体要素の回転を表わすだけである。対称部分は流体要素の変形 (伸たり縮んだり) を表わし、これを変形速度テンソルという。非圧縮ニュートン流体の粘性応力はこの対称部分に  $2\mu = 2\rho\nu$  を乗じたものになっている。これの発散を取ると (6.1) の右辺にある粘性項が得られる。変形に対して抗する力が粘性力である。(6.21) の渦粘性応力もこれと同じ形をしている。

# Chapter 7

## 回転系での方程式

ここまでの議論では地球自転の効果は考えなかった。回転する系から見るか、非回転系(宇宙)から見るかは単に座標変換の問題に過ぎない。しかし、我々地球上に住む人間から見たとき、この自転の効果が様々な不思議な現象を産み出す。例えば、我々の世界には高気圧という(北半球では)時計回りに回る渦が存在する。しかし、コーヒーカップの中のコーヒーをかき回して出来る渦は、回転の向きに関係なく、必ず真ん中がくぼむ、すなわち低気圧である。

### 7.1 回転系での運動方程式

$\Omega$  で回転する長さ一定のベクトル  $A$  の時間変化がどのように表されるかをまず考える。 $(x, y, z)$  方向の単位ベクトルを  $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$  と置く。 $\Omega$  の方向を  $z$  軸に取る ( $\Omega = \hat{z}\Omega_z$ )。そうするとベクトル  $A = \hat{x}A_x + \hat{y}A_y + \hat{z}A_z$  は

$$A_x = A_H \cos(\Omega_z t + \varphi), \quad A_y = A_H \sin(\Omega_z t + \varphi), \quad A_z = \text{const.} \quad (7.1)$$

となる。ここで、 $\varphi$  は  $t = 0$  での位相を表す定数で、 $A_H$  は  $A_H = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$ 。したがって、

$$\frac{DA}{Dt} = -\hat{x}\Omega_z A_y + \hat{y}\Omega_z A_x = \Omega_z \hat{z} \times A. \quad (7.2)$$

$\Omega$  の各成分について同様のことをすれば明らかのように、一般に、 $\Omega$  の向きに関わりなく、

$$\frac{DA}{Dt} = \Omega \times A \quad (7.3)$$

となる。

次に、ベクトル  $B$  の慣性系での時間変化が  $\Omega$  で回転する回転系でどのように表されるかを考える。直交直線座標系を考え、回転系での各座標軸方向の単位ベクトルを  $i_1, i_2, i_3$



とすると、 $B = i_1 B_1 + i_2 B_2 + i_3 B_3$  である。座標軸の回転に注意すると、 $B$  の時間微分は

$$\begin{aligned} \left(\frac{DB}{Dt}\right)_I &= \left(\frac{DB}{Dt}\right)_R + B_1 \frac{Di_1}{Dt} + B_2 \frac{Di_2}{Dt} + B_3 \frac{Di_3}{Dt} \\ &= \left(\frac{DB}{Dt}\right)_R + \boldsymbol{\Omega} \times (i_1 B_1 + i_2 B_2 + i_3 B_3) \\ &= \left(\frac{DB}{Dt}\right)_R + \boldsymbol{\Omega} \times B \end{aligned} \quad (7.4)$$

となる。ここで、添字の  $I$  と  $R$  は、それぞれ、慣性系における微分と回転系における微分を表す。

以上より、慣性系から見た速度  $\mathbf{v}_I$  と回転系から見た速度  $\mathbf{v}_R$  の関係は ( $\mathbf{v} = D\mathbf{r}/Dt$  なので)、

$$\mathbf{v}_I = \mathbf{v}_R + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}, \quad (7.5)$$

と書けることが分かる。そして、加速度は、

$$\begin{aligned} \left(\frac{D\mathbf{v}_I}{Dt}\right)_I &= \left(\frac{D\mathbf{v}_I}{Dt}\right)_R + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}_I \\ &= \left(\frac{D\mathbf{v}_R}{Dt}\right)_R + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}_R + \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r} \end{aligned} \quad (7.6)$$

となる。スカラー量の空間微分と粘性項は回転しているかどうかには依らないので、回転系での運動方程式は

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v} + \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - \nabla \phi + \nu \nabla^2 \mathbf{v} \quad (7.7)$$

となる。連続の式は、もちろん、回転しているかどうかには依らない。

問題 7.1.1: 連続の式並びに粘性項が回転系から見ても慣性系から見ても同じように書けることを示せ。

問題 7.1.2: 圧力  $p$  を静止状態での圧力  $\bar{p}$  を用いて、 $p = \bar{p} + p'$  とし、さらに密度を一定としたとき、 $p'$  を用いると (7.7) はどのように書けるか。

問題 7.1.3: 前問で得た方程式から運動エネルギーの式を導出せよ。 $\nu = 0$  としてよい。慣性系の場合 (問題 2.3.4) と違いはあるか?

## 7.2 遠心力とジオイド

(7.7) の左辺第 3 項は遠心力の項である (正しくは右辺に持ってきて質量を掛けたときにそれを遠心力という)。この力の大きさは、回転軸からの距離のみによって決まり、 $r$  の  $\Omega$

に直交する成分を  $r_p$  と書くと

$$\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{r}) = -|\boldsymbol{\Omega}|^2 \boldsymbol{r}_p \quad (7.8)$$

と表され、さらに

$$\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{r}) = -\nabla \left\{ \frac{1}{2} |\boldsymbol{\Omega}|^2 |\boldsymbol{r}_p|^2 \right\} = \nabla \phi_c \quad (7.9)$$

と、力のポテンシャルの形で書ける。他方、地球の引力もポテンシャルの形で書けるので、両者を

$$\Phi = \phi + \phi_c \quad (7.10)$$

とまとめることが出来る。我々は  $-\nabla\Phi$  を重力と感じている (実際我々が重力加速度と呼んでいるものは  $-\nabla\Phi$  である)。この  $\Phi$  をジオポテンシャル (Geopotential) と呼び、 $\Phi =$  一定の面を等ジオポテンシャル面、平均海面に対応する等ジオポテンシャル面をジオイド (Geoid) と言う。結局、流体の運動方程式は

$$\frac{D\boldsymbol{v}}{Dt} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - \nabla\Phi + \nu \nabla^2 \boldsymbol{v} \quad (7.11)$$

と書ける。

回転系での水平 (等ポテンシャル面) の概念には既に回転の効果が入っていることに注意。そのため、回転している系に乗っている人と慣性系から見ている人では、水平面 (等ポテンシャル面) が違ってくる。回転台に水の入った水槽を載せて回転させると真ん中がくぼむ (中心の圧力が低い)。これは、流体を円運動させるためには、中心向きの圧力傾度力が必要だからである。しかし、回転台の上にいる人にとっては、中央がくぼんだ水面が水平面 (等ポテンシャル面) である (重力はその面に直交している)。このことが、回転系での高気圧性の渦の存在を可能にする (問題 7.2.3)。

問題 7.2.1: 地球の自転による  $\boldsymbol{\Omega}$  はいくらか? また、赤道上の地表での遠心力はどれくらいか。

問題 7.2.2: 水槽に水を入れ、回転台に載せて、角速度  $\boldsymbol{\Omega}$  で回転させた。水は水槽と一緒に回転している。水面の形状を求めよ。この形状がこの水槽におけるジオイドの形状である。

問題 7.2.3: 慣性系では渦は必ず中央の圧力が低い低気圧になる。では、何故、回転系では高気圧性渦が存在可能なのか、上の議論を元に説明せよ。

### 7.3 コリオリ力と慣性振動

(7.7) の左辺第 2 項はコリオリの項である。回転軸を  $z$  軸とし、他の項をすべて無視すると  $(x, y)$  の運動  $(u, v)$  に関する方程式は

$$\frac{Du}{Dt} = 2\Omega v, \quad (7.12)$$

$$\frac{Dv}{Dt} = -2\Omega u. \quad (7.13)$$

ここで、 $\Omega$  は  $z$  軸周りの回転角速度である。式より明らかなよう、流速  $\mathbf{u} = (u, v)$  があると、それを  $\Omega$  が正 (= 系の回転方向が反時計回り) ならば右に曲げるように力は働く。負なら逆である。これをコリオリ力という。上の 2 つの方程式を  $u, v$  が空間的に一様であると、 $t = 0$  で  $u = V_0, v = 0$  として解くと

$$u(t) = V_0 \cos 2\Omega t, \quad v(t) = -V_0 \sin 2\Omega t \quad (7.14)$$

となる。更にこれを時間で積分すると

$$x(t) = \frac{V_0}{2\Omega} \sin 2\Omega t + X_0, \quad y(t) = \frac{V_0}{2\Omega} (\cos 2\Omega t - 1) + Y_0 \quad (7.15)$$

を得る (ここで、 $X_0, Y_0$  は初期座標)。これらより、 $\Omega > 0$  ならば、 $(u, v)$  ベクトルは  $2\Omega$  で時計回りに回転することが、そして、粒子の軌跡は円を描くことが分かる。これを慣性振動と呼ぶ。そして、その周期を慣性周期という。慣性振動、もしくは、近慣性周期の振動は海洋では良く観測される。

コリオリ力をよりよく理解するために、反時計まわりに回転する円盤上の質点の円盤に相対的な運動を考えよう。相対速度がゼロの場合、遠心力と中心力が釣り合っていると仮定する (ジオイド上の運動を考える)。もし質点が円盤より速く回転しているとすると、質点に働く遠心力が中心力を上回り、質点は外向き、すなわち右に曲げられる。もし、円盤の回転より遅ければ、中心力が上回るため、内向き、すなわち、やはり右に曲げられる。質点が、回転中心に向かって運動するときには、角運動量の保存則より  $r^2\omega = \text{一定}$  なので、 $r$  (回転中心からの距離) の減少に伴い、角速度、 $\omega$ 、が増大、すなわち、右に曲げられる。もし、運動が外向きなら、 $\omega$  が減少し、やはり、右に曲げられることになる。これがコリオリ力である。

上のことを式を用いて示す。粒子が系に対して静止しているときの釣り合いは、

$$\Omega^2 r + F = 0. \quad (7.16)$$

ここで、 $F$  は中心力を質量で割ったもの。粒子が系に相対的に  $v_\theta$  で回転したとすると、中心から外向き ( $r$  方向) に

$$\Delta F = \left(\Omega + \frac{v_\theta}{r}\right)^2 r + F = 2\Omega v_\theta + \frac{1}{r} v_\theta^2 \quad (7.17)$$

が働くことになる。したがって、

$$\frac{Dv_r}{Dt} = 2\Omega v_\theta + \frac{1}{r} v_\theta^2. \quad (7.18)$$

他方、粒子が  $r$  方向に初期位置  $R$  から  $\delta r$  移動したとする ( $r = R + \delta r$  とする)。角運動量の保存より、

$$\begin{aligned} R^2 \Omega &= r^2 \left(\Omega + \frac{v_\theta}{r}\right) \\ &= r^2 \Omega + r v_\theta \end{aligned} \quad (7.19)$$

両辺を  $t$  で微分し、 $r$  で割れば、( $Dr/Dt = v_r$  なので)

$$2\Omega v_r + \frac{v_r v_\theta}{r} + \frac{Dv_\theta}{Dt} = 0. \quad (7.20)$$

極座標  $(r, \theta)$  上での  $D\mathbf{u}/Dt$  が

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \hat{\theta} \left( \frac{Dv_\theta}{Dt} + \frac{v_r v_\theta}{r} \right) + \hat{r} \left( \frac{Dv_r}{Dt} - \frac{v_\theta^2}{r} \right) \quad (7.21)$$

である (ここで、 $\hat{\theta}$ ,  $\hat{r}$  は、それぞれ  $\theta$  方向、 $r$  方向の単位ベクトル) ことを考慮すれば、

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -2\Omega \hat{z} \times \mathbf{u}, \quad (7.22)$$

となり、(7.12)、(7.13) と一致する。

問題 7.3.1:  $(u, v)$  が空間的に一様であるとして、(7.12)、(7.13) から (7.14)、(7.15) を実際に求めよ。

問題 7.3.2: 北極でキャッチボールをしましょう。ピッチャーとキャッチャーの距離が 10m、ボールの速度は 100km/h であったとする。コリオリ力でボールはどれだけ曲げられるか?

問題 7.3.3: 慣性周期が、系の回転周期の半分になる理由を考えるために、 $-\Omega^2 r$  の中心力が働いている系での質点の運動を考える。この系では、質点が角速度  $\Omega$  で円運動すれば、加速度と中心力が釣り合い、角速度  $\Omega$  で回転している (回転系の) 観察者が

ら見ると静止して見える。

(a) 以下の2つの運動形態を  $\Omega$  で円運動している観察者からどう見えるか考えてみよう。

(i)  $-\Omega$  で逆に回転した場合。

(ii) 中心を通過する直線に沿って単振動した場合。

(b) 一般には、この場合質点は楕円軌道に沿う周期運動を行う。実際に問題を解き、回転系から見た場合について考察せよ。

[ ヒント ]:  $x-y$  面上の位置座標  $(x, y)$  を  $\theta$  だけ回転させた座標系で見ると、その成分は、

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

と書ける。

## 7.4 局所直交直線座標系

### 7.4.1 球面座標系と局所直交直線座標系

地球はほぼ球である。したがって、大気海洋流体はその球面上で運動する。運動方程式を球面座標系で書くと

$$\frac{Du}{Dt} - \left( 2\Omega + \frac{u}{r \cos \theta} \right) (v \sin \theta - w \cos \theta) = -\frac{1}{\rho r \cos \theta} \frac{\partial p}{\partial \phi} + \text{粘性項} \quad (7.23)$$

$$\frac{Dv}{Dt} + \frac{wv}{r} + \left( 2\Omega + \frac{u}{r \cos \theta} \right) u \sin \theta = -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \text{粘性項} \quad (7.24)$$

$$\frac{Dw}{Dt} - \frac{v^2}{r} - \left( 2\Omega + \frac{u}{r \cos \theta} \right) u \cos \theta = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} - g + \text{粘性項} \quad (7.25)$$

となる。ここで、 $\phi, \theta, r$  は経度、緯度、地球中心からの距離、 $u, v, w$  はその方向の流速で、

$$g = -|\nabla \Phi|,$$

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{u}{r \cos \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} + \frac{v}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + w \frac{\partial}{\partial r}$$

である。

地球上の流体運動を考える場合、定量的にはこの球面極座標での議論が必要になるが、球面座標での理論展開は必ずしも見通しがよくなく、かつ、多くの場合、定量的には局所

直交直線座標で十分議論することが可能である。この局所座標は、緯度  $\theta = \theta_0$ 、経度  $\phi_0$ 、 $r =$  地球半径 ( $a$ ) に接する平面を考え、

$$x = (\phi - \phi_0)a \cos \theta_0, \quad y = (\theta - \theta_0)a, \quad z = r - a \quad (7.26)$$

によって与えられる。地球の自転による速度,  $r\Omega$ , に比べて流速がずっと小さく、かつ、 $|x/a|$ 、 $|y/a|$ 、 $|z/a|$  がすべて 1 よりずっと小さいという仮定の下で、 $(x, y, z)$  成分の方程式はそれぞれ

$$\frac{Du}{Dt} - fv + \hat{f}w = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \text{粘性項} \quad (7.27)$$

$$\frac{Dv}{Dt} + fu = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \text{粘性項} \quad (7.28)$$

$$\frac{Dw}{Dt} - \hat{f}u = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g + \text{粘性項} \quad (7.29)$$

となる。ここで、 $f$  と  $\hat{f}$  は地球の自転ベクトルの 2 倍、 $2\Omega$ 、の鉛直並びに北向き成分、

$$f = 2\Omega \sin \theta, \quad \hat{f} = 2\Omega \cos \theta \quad (7.30)$$

である。

通常、 $\hat{f}$  の項は無視される。また、鉛直方向の運動方程式は静水圧の関係式で近似される。これは、大気や海洋の長い時間スケールをもつ現象に対しては、水平スケール (100km ~ 10000km) に比べて鉛直スケール (1km ~ 10km 程度) が十分に小さいという事実から導かれる。そして、この事実は大気や海洋が成層流体であることにより鉛直方向の運動が押さえられるということから説明される。詳細はともかくとし、現実には  $\hat{f}$  の項が無視できるので、 $f/2$  で鉛直軸回りに回転している系で得られる事柄は、中緯度の大規模現象にも通常そのまま適用できる。 $f$  をコリオリパラメタ、もしくは、コリオリ振動数という。なお、地球は丸いため、(7.30) にあるように  $f$  は緯度の関数である。

問題 7.4.1: (7.23) ~ (7.25) 式から (7.27) ~ (7.29) 式を導びけ。

問題 7.4.2: 運動の水平スケールを、南北東西によらず、流速、 $U$ 、長さ、 $L$ 、とし、鉛直スケールを  $W$ 、 $D$  としたとき、 $\hat{f}$  が無視できるための条件を求めよ。

## 7.4.2 効果

地球が丸いということの影響について少し考えよう。地球上の流体の大規模な運動では、 $\hat{f}$  は無視できると述べた。つまり方程式は、

$$\frac{Du}{Dt} - fv = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \text{粘性項} \quad (7.31)$$

$$\frac{Dv}{Dt} + fu = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \text{粘性項} \quad (7.32)$$

となる。密度は水平方向には変化せず、非圧縮で、鉛直流速はなく、粘性項は無視できるとして、(7.32) を  $x$  で微分した式から (7.31) を  $y$  で微分した式を引くと渦度の鉛直成分の式

$$\frac{D}{Dt} (\zeta + f) = 0 \quad (7.33)$$

を得る。ここで、 $\zeta = \partial v / \partial x - \partial u / \partial y$  は地球上で見たときの渦度の鉛直成分である。なお、 $\zeta + f$  は、宇宙から見たときの流体の渦度 (流体の回転角速度  $\times 2$ ) なので、絶対渦度、 $f$  は惑星の持つ渦度という意味で惑星渦度、 $\zeta$  は惑星に相対的な渦度という意味で、相対渦度と呼ばれる。(7.33) より、流体が南北に移動すると  $f$  は変化するが、その場合でも、 $\zeta + f$  は一定である。つまり、赤道で静止していた流体 ( $f = \zeta = 0$ ) が高緯度に移ると  $\zeta = -f$  の相対渦度が生じることを意味する。例えば、北極まで移動すれば、時計回りに一日で1回転することになる。これは、宇宙から見てその流体は回転していないということである。逆に、北極で地表に相対的に回転していない流体を赤道まで移動させると反時計回りに一日で1回転することになる。

地球上の流体の大規模運動における回転軸は地表面に垂直なので宇宙から見たときの軸の方向は緯度とともに変るが、それが変わっても回転数は変化しない。これは、角運動量の大きさが、それを回転させるような力が働かない限り、その回転軸の方向を変えても変化しないことに対応する。他方、我々はその変化しない回転を緯度に依存する角速度  $f/2$  で鉛直軸回りに回転している系から見ている。そのため、緯度の変化に伴って回転 ( $\zeta/2$ ) が生じたり、変化したりするように見える。地球上の流体は地球に相対的な流れによって流されるので、この  $\zeta$  の発生や変化は、地球上の流体運動に大きく影響する。流体運動に対するこの効果を  $\beta$  効果という。地球上の流体現象を緯度  $\theta_0$ 、経度  $\phi_0$  を中心とする局所直交直線座標系で近似するとき、 $f$  の南北変化を  $y$  の一次までで表し、 $f(y) = f_0 + \beta y$  とする場合が多い。これを  $\beta$  平面という。ここで、 $f_0 = 2\Omega \sin \theta_0$ 、 $\beta = \frac{2\Omega}{a} \cos \theta_0$  である。南北スケールがあまり大きくない現象は、少なくとも定性的には、 $\beta$  平面で十分に表現することができる。なお、 $f$  の緯度変化を無視した平面を  $f$  平面という。これも南北スケールが十分に小さな現象に対しては良く用いられる。

問題 7.4.3: 地球が丸いことにより、地球自転角速度の鉛直成分は緯度の関数となる。そのことの影響を実感するために、次の実験を行え。

車軸の周りで自由に回転出来る自転車の車輪を用意する。車軸に柄を付ける。柄を持って回転台に乗り、回転する。軸を水平にし、車輪が車軸周りに回転していない状態から車軸を傾けていったとき、車輪の回転はどうなるか? 慣性系から見ている

人と回転台の人それぞれの立場で述べよ。回転台の人から見える車輪の回転は何を意味するか？



# Chapter 8

## 回転系での浅水波と地衡流

自転する地球上で運動するものに対しては、コリオリの力が働く。ここでは、§5 で見た浅水波に対する自転の効果と、浅水方程式の新たな解として現れる地衡流について考える。以下の議論では鉛直軸回りに  $f/2$  で回転する系を考える。

### 8.1 回転系での浅水方程式と浅水波の式

$\hat{f}$  を無視したときの回転系 (鉛直軸回りに  $f/2$  で回転) での理想流体の運動方程式は、直角座標を用いて、

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \left( u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z} \right) u - fv = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (8.1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \left( u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z} \right) v + fu = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}, \quad (8.2)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \left( u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z} \right) w = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g, \quad (8.3)$$

である。ここで、 $(x, y)$  は水平の座標、 $z$  は鉛直上向きである。連続の式は非圧縮を仮定し、

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (8.4)$$

§5.1 と同様に密度一定とし、さらに、浅水近似 ( $D/L \ll 1$ ) を導入すると、

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \left( u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} \right) u - fv = -g \frac{\partial \eta}{\partial x}, \quad (8.5)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \left( u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} \right) v + fu = -g \frac{\partial \eta}{\partial y}, \quad (8.6)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} [(H + \eta)u] + \frac{\partial}{\partial y} [(H + \eta)v] = 0, \quad (8.7)$$

となる。線形化すれば、

$$\frac{\partial u}{\partial t} - fv = -g \frac{\partial \eta}{\partial x}, \quad (8.8)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + fu = -g \frac{\partial \eta}{\partial y}, \quad (8.9)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}[Hu] + \frac{\partial}{\partial y}[Hv] = 0. \quad (8.10)$$

$f$  も  $H$  も空間的に一様と仮定すると、(8.8)–(8.10) より、

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} + f^2 \right) \eta - gH \nabla_H^2 \eta \right] = 0, \quad (8.11)$$

と  $\eta$  のみの方程式に帰着できる。ここで、 $\nabla_H$  は水平 2 次元の微分演算子 ( $\hat{x}\partial/\partial x + \hat{y}\partial/\partial y$ ) である。この式を解けば、波の解が得られる。なお、この  $\eta$  と  $(u, v)$  の関係は、(8.8) と (8.9) より、

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} + f^2 \right) u = -g \left( \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial t} + f \frac{\partial \eta}{\partial y} \right), \quad (8.12)$$

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} + f^2 \right) v = -g \left( \frac{\partial^2 \eta}{\partial y \partial t} - f \frac{\partial \eta}{\partial x} \right). \quad (8.13)$$

平面波の解、

$$\eta = \eta_0 \exp\{i(kx + ly - \sigma t)\} \quad (8.14)$$

を (8.11) に代入すると、

$$\sigma(\sigma^2 - gH|\mathbf{K}|^2 - f^2) = 0, \quad (8.15)$$

が得られる。ここで、 $|\mathbf{K}|^2 = k^2 + l^2$ 。したがって、平面波が解であるためには、

$$\sigma = \pm \sqrt{gH|\mathbf{K}|^2 + f^2}, \quad (8.16)$$

もしくは

$$\sigma = 0, \quad (8.17)$$

でなければいけない。前者は  $f = 0$  とすれば、§5.1.2 の浅水 (重力) 波に一致。したがって、これは回転の影響下での浅水重力波であると考えられる。この波を慣性重力波という。他方、後者の解は、定常であることを意味する。(8.12), (8.13)、もしくは、(8.8), (8.9) より、定常なら

$$u = -\frac{g}{f} \frac{\partial \eta}{\partial y}, \quad v = \frac{g}{f} \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad (8.18)$$

となる。これはコリオリ力と圧力傾度力の釣り合いであり、地衡流平衡と呼ばれる。この時、水平流速を  $\mathbf{u} = \hat{x}u + \hat{y}v$  と書けば、

$$\mathbf{u} \cdot \nabla_H \eta = 0 \quad (8.19)$$

なので、流れは、等圧線に沿うことが分かる。北半球では、流れに対して右向きにコリオリ力が働くので、圧力の高い方(峰)を右に見て流れる。南半球では逆である。流速は、圧力分布を描いたとき、等圧線が混んでいる( $\eta$ の傾きが大きい)ところほど大きい。回転系では、必ずしも水は高い方から低い方へは流れない。現実の大気海洋における大規模なゆっくりとした流れは、多くの場合、ほぼ地衡流平衡にある。地衡流については、§8.4でさらに詳細に見てみる。

問題 8.1.1 (8.5)–(8.7) から次のエネルギー方程式を導出せよ。

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\{ \rho \frac{1}{2} (H + \eta) |\mathbf{u}|^2 + \frac{1}{2} \rho g \eta^2 \right\} + \nabla_H \cdot \left\{ (H + \eta) \left[ \rho \frac{1}{2} |\mathbf{u}|^2 + \rho g \eta \right] \mathbf{u} \right\} = 0$$

ここで、 $\rho \frac{1}{2} (H + \eta) |\mathbf{u}|^2$  が運動エネルギー、 $\frac{1}{2} \rho g \eta^2$  がポテンシャルエネルギーである。 $f$  が入ってこないことに注意。

問題 8.1.2 (8.5)–(8.7) から次のポテンシャル渦度方程式 (§4.2, 4章の参考 参照) を導出せよ。

$$\left[ \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} \right] \left\{ \frac{1}{H + \eta} \left( f + \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right\} = 0$$

問題 8.1.3 (8.11)–(8.13) を導出せよ。

問題 8.1.4 (8.15) を導出せよ。

問題 8.1.5 (8.19) を導出せよ。

## 8.2 慣性重力波

慣性重力波の分散関係より、この波の最小の振動数は  $f$  であることが分かる。すなわち、慣性周期より長い周期の慣性重力波は存在しない。波の位相速度は

$$c = \pm \sqrt{gH + \frac{f^2}{|\mathbf{K}|^2}}. \quad (8.20)$$

(8.14) を (8.12), (8.13) に代入し、波数ベクトルの方向を  $x$  軸に取る ( $l = 0$  とする) と、

$$u = \frac{\sigma \eta_0}{kH} e^{i(kx - \sigma t)} \quad (8.21)$$

$$v = -\frac{if\eta_0}{kH} e^{i(kx - \sigma t)} \quad (8.22)$$

となる。もしくはその Real part をとれば、

$$u = \frac{\sigma|\eta_0|}{kH} \cos(kx - \sigma t + \phi) \quad (8.23)$$

$$v = \frac{f|\eta_0|}{kH} \sin(kx - \sigma t + \phi) \quad (8.24)$$

となる。ここで、 $\phi$  は位相 ( $\eta_0 = |\eta_0|e^{i\phi}$ ) で、 $\eta = |\eta_0| \cos(kx - \sigma t + \phi)$ 。

§5 の波とは違って、 $f \neq 0$  のときには、波数ベクトルに直交する流れの成分も現れる。波の峰では、流速は、波数ベクトルに平行で位相速度と同じ向きであるが、峰の後方 (谷の前方) では、峰を (北半球では) 左に見る方向の成分が現れる。波数ベクトルの方向の流れは、谷では、位相速度の逆向き、そして、谷の後方 (峰の前方) では、谷を右に見る方向になる。ある一点で計測したときの流速ベクトルは右回りに回転し、粒子の軌跡は楕円になる。コリオリ力の方向と圧力傾度力の方向の成す角は、(圧力傾度力の働かない谷と峰を除けば) 鋭角になる。すなわち、コリオリ力は、圧力傾度力と同じ方向に、粒子をさらに加速するように働く。それ故、 $f = 0$  の場合と比べて、同じ波数に対しては、振動数が大きくなる。また、圧力傾度力が働かない長波極限では、運動は慣性振動になる。それよりゆっくりとした波は、このような無限に広い領域を考える限り、重力波では起こせない。

慣性重力波の群速度は長波極限 (波数ゼロ) ではゼロになる。このことは、もし、何らかの外力で、いろいろな波数 (振動数) の慣性重力波がある限られた領域に励起されたとき、その強制域には慣性振動 (波数ゼロの慣性重力波) のみが残ること、それ故、強制域では、慣性振動 (もしくは近慣性振動) が観測されやすいであろうことを意味する。

地衡流運動においては、圧力傾度力とコリオリ力の方向は慣性重力波と逆向きであった。このことは地衡流運動と慣性重力波がまるっきり違う種類の運動であることを意味する。

問題 8.2.1: 慣性重力波の分散関係を図示せよ。また、群速度を計算し、そのグラフも描け。

問題 8.2.2: (8.21), (8.22)、もしくは、(8.23), (8.24) を導出せよ。

問題 8.2.3: 波の峰、谷、と水平流速ベクトル場を重ねて図示せよ。

### 8.3 ケルヴィン波

慣性重力波の周期は慣性周期より短い、このことをもって、慣性周期より長い周期の重力波は存在しないとは言えない。その例外的存在が Kelvin 波である。これは岸の存在が

本質的に重要な波である。 $y = 0$  に岸があり、 $y \geq 0$  が海であったとしよう。この場合、岸から離れていくにしたがって振幅が減少するなら、 $l$  が虚数であっても構わなくなる（無限領域で  $l$  が虚数だと  $\eta$  は指数関数型になり、 $y \rightarrow \infty$  もしくは  $-\infty$  で無限大に発散するので、そういう解は考えられない）。例えば、 $l = ia$  と置こう。そうすると (8.16) は

$$\sigma = \pm \sqrt{gH(k^2 - a^2) + f^2}, \quad (8.25)$$

なので、もし、 $l$  が虚数になり得るなら、 $|\sigma| < |f|$  の解が可能になる。この時、 $v$  は (8.13) より、

$$v = -\frac{ig}{f^2 - \sigma^2} (a\sigma - fk) \eta_0 e^{-ay} e^{ikx - \sigma t} \quad (8.26)$$

である。岸 ( $y = 0$ ) では、 $v = 0$  なので、この場合、それを満足するには  $a = fk/\sigma$  でなければならない。この  $a$  を (8.25) に代入すると、

$$\sigma^2 = gHk^2 \quad \text{もしくは} \quad \sigma^2 = f^2 \quad (8.27)$$

となる。これらの内、後者の解では、(8.26) の分母がゼロになり、実際には  $v = 0$  を満足しない。前者の解を用い、振幅が岸を離れるに従い小さくなるためには  $a > 0$  でなければならないことに注意すれば、

$$a = \frac{f}{c}, \quad c = \frac{f}{|f|} \sqrt{gH} \quad (8.28)$$

を得る。波の解は、

$$\eta = \eta_0 e^{-y/R} e^{ik(x-ct)} \quad (8.29)$$

$$u = \frac{c\eta_0}{H} e^{-y/R} e^{ik(x-ct)}, \quad v = 0. \quad (8.30)$$

となる。ここで、 $R$  は  $a$  の逆数で、Rossby の変形半径と呼ばれる。 $c$  は  $f$  が正 (北半球) なら正、負 (南半球) なら負である。すなわち、非回転系の浅水重力波と同じ速度で、北半球では岸を右に見るように (南半球では岸を左に見るように) 伝播する。そして、沖向きには Rossby の変形半径で振幅が減衰する。これを Kelvin 波という。 $v = 0$  なので、 $y$  方向の運動方程式は地衡流の式になっている。なお、Rossby の変形半径は重力波が  $1/f$  時間で伝播する距離を表す。この波では、岸があることによりコリオリ力による回転が押さえられ、それ故に、 $2\pi/f$  よりも長い周期が可能になったと見ることができる。

この解は、最初から、(8.8)–(8.10) で、 $v = 0$  と置くことによっても得ることができる。

この波の分散関係は非回転系の浅水重力波と同じなので、波は非分散である。

問題 8.3.1: (8.8)–(8.10) で、 $v = 0$  と置くことによつて Kelvin 波の解を導出せよ。

問題 8.3.2(ポアンカレ波): §5.1.3 と同様の水路を考えて、(8.11) を水路の壁で  $v = 0$  の条件の下に解け。§5.1.3 の  $n = 0$  のモードに対応する波が Kelvin 波であり、 $n \geq 1$  のモードに対応する波は Poincaré 波と呼ばれる。分散関係を図示せよ。また、それらの波の振幅分布と水平流速ベクトルを重ねて図示せよ。

## 8.4 地衡流

ケルヴィン波を除くと、 $f$  より振動数の小さい重力波は存在しない。それ故、定常的な流れは、基本的には地衡流平衡にあるものと考えられる。また、外力場が地衡流平衡しない流れの場を励起したとしても、章末の〈参考1〉に記したように、地衡流平衡していない部分は重力波で遠方へ伝播してしまう(地衡流調節が起る)ので、 $2\pi/f$ (慣性周期)よりも長い時間スケールで現象を眺めれば、場は常にほぼ地衡流平衡していると見なすことが出来る。すなわち、慣性周期を境にして、現象の変動機構が質的に異なることが示唆される。

### 8.4.1 Rossby 数、Ekman 数

非線形項無視、 $f$  一定、 $H$  一定の上の取り扱いでは、地衡流は完全に定常であったが、現実には、ほぼ地衡流平衡した形で、何らかの外力や、散逸、移流、流体の厚さの分布に伴う収束発散や  $f$  の緯度変化等(ここでは、 $f = f_0 + \beta y$  と記す。 $f_0$  はある固定された緯度での  $f$ )により、ゆっくりとした変動を示す。どの程度地衡流平衡しているかを示す尺度としては、ロスビー数とエクマン数がある。

我々の見たい現象のスケールを、時間、 $T$ 、水平スケール、 $L$ 、鉛直スケール、 $D$ 、水平流速、 $U$ 、鉛直流速、 $W$ 、としよう。この時、 $W$  は  $W = \frac{D}{L}U$  となる。そうすると粘性項まで含めた水平成分の運動方程式は、

$$\varepsilon_T \frac{\partial \mathbf{u}_*}{\partial t_*} + \varepsilon \left( \mathbf{u}_* \cdot \nabla_{H_*} + w_* \frac{\partial}{\partial z_*} \right) \mathbf{u}_* - (1 + \beta_* y_*) \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{u}_* = -\frac{1}{\rho_*} \nabla_{H_*} p_* + \frac{1}{2} \left( E_H \nabla_{H_*}^2 + E_V \frac{\partial^2}{\partial z_*^2} \right) \mathbf{u}_*, \quad (8.31)$$

となる。ここで、 $\mathbf{u}$  は水平流速ベクトル、 $\nabla_H$  は水平の微分演算子で、 $*$  は無次元量であることを示す。 $\rho_*$  は平均の密度  $\rho_0$  で無次元化してあり、圧力(静止状態での圧力を除いたもの)は  $\rho_0 f L U$  で無次元化した。 $\beta_*$  は対象とする領域内でのコリオリ力の変化の大きさを表わす無次元の  $\beta$  で  $\beta_* = \frac{\beta L}{f_0}$  である。また、式中には以下の無次元パラメタが現れる。

- 時間ロスビー数、 $\varepsilon_T = \frac{1}{f_0 T}$  : コリオリ項と時間変動項の比。

- ロスビー数、 $\varepsilon = \frac{U}{f_0 L}$  : コリオリ項と移流項の比、もしくは、回転系に相対的な流体の渦度 (相対渦度  $= \partial v/\partial x - \partial u/\partial y$ ) の回転系の持つ渦度 (惑星渦度  $= f$ ) に対する比。地衡流からのずれを代表するのは通常はこの  $\varepsilon$  である。
- 水平エクマン数、 $E_H = \frac{2\nu}{f_0 L^2}$  : コリオリ項と水平方向への運動量の拡散の比。
- 鉛直エクマン数、 $E_V = \frac{2\nu}{f_0 D^2}$  : コリオリ項と鉛直方向への運動量の拡散の比。

これらの無次元数が十分に小さければ、流れはほぼ地衡流平衡にあると見なせる。そして、それからの微小なずれによって、流れの場はほぼ地衡流平衡した状態のままゆっくりと変化することになる。時間変化を産み出すものとしては、非線形項や粘性以外に、流体の厚さの分布や  $\beta$  効果による非等方性がある。

問題 8.4.1: 緯度  $30^\circ$ 、水平スケールを 100km、流速を 10cm/s、時間スケールを 1ヶ月として、時間ロスビー数、 $\varepsilon_T$ 、とロスビー数、 $\varepsilon$ 、を求めよ。

## 8.4.2 地衡流流線

8.3 節までは、圧力として水面変位  $\eta$  を使っていたが、ここでは  $p$  を使う。地衡流平衡は、圧力傾度力とコリオリ力の釣り合いなので、

$$-fv = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad fu = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}. \quad (8.32)$$

したがって、

$$\mathbf{u} \cdot \nabla_H p = 0 \quad (8.33)$$

となり、流れは等圧線に沿うことが分かる。各点での流速ベクトルに沿う方向の線分をつないだものを流線というが、このことは、等圧線が流線になっていることを意味する。また、

$$\mathbf{u} = \hat{z} \times \nabla_H \psi \quad (8.34)$$

を満足する  $\psi$  を流線関数というが、地衡流の場合、( $f$  が一定で、かつ、 $\rho$  が水平に変化しないと見なせるならば)  $p/\rho f$  が流線関数になっていることが分かる。この時、

$$\nabla_H \cdot \mathbf{u} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (8.35)$$

なので、密度の水平変化が無視できる  $f$  平面の地衡流は水平非発散であることが分かる。また、地衡流からのずれが  $\varepsilon$  程度とすると、 $\nabla_H \cdot \mathbf{u} = O(\varepsilon U/L)$  なので、鉛直のスケール  $W$  は

$$W = \varepsilon \frac{D}{L} U \quad (8.36)$$

と、非回転系の場合に比べて  $\varepsilon$  程度小さくなる。

さらに、ある 2 点 ( $\mathbf{r} = \mathbf{r}_A$  と  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_B$ 、流線関数の値  $\psi_A$  と  $\psi_B$ ) 間を通過する単位厚さ当りの流量は、2 点を結ぶ線分に沿うベクトル要素  $d\mathbf{r} = (dx, dy)$  に直交右向きの単位ベクトルが  $-\hat{z} \times d\mathbf{r}/|d\mathbf{r}|$  で、その方向の流速は  $u_T = -\mathbf{u} \cdot (\hat{z} \times d\mathbf{r})/|d\mathbf{r}|$  となるので

$$\int_{\mathbf{r}_A}^{\mathbf{r}_B} u_T d|\mathbf{r}| = - \int_{\mathbf{r}_A}^{\mathbf{r}_B} \mathbf{u} \cdot (\hat{z} \times d\mathbf{r}) = - \int_{\mathbf{r}_A}^{\mathbf{r}_B} \nabla_H \psi \cdot d\mathbf{r} = \psi_A - \psi_B \quad (8.37)$$

と書ける。すなわち、ある 2 点間を通過する単位厚さ当りの流量はその 2 点での流線関数の値さえ分かっていたら求まる。

赤道近くでは  $f$  が小さくなり、地衡流は必ずしも良い近似とは言えないが、中高緯度の大気海洋の大規模なゆっくりとした運動を考える場合には、流れの場は近似的にこの地衡流流線で表現できる。 $(u, v)$  というベクトル量が流線というスカラー量で表されるということが、大気海洋の複雑な現象を非常に分かりやすくする。

問題 8.4.2: 北緯  $30^\circ$  の海洋のある点 A の回りで水位を測定した。A 点の北 10km の地点では A 点よりも水位が 10cm 低かった。また、A 点の東 10km の地点では A 点よりも水位が 10cm 高かった。この水位分布は定常であるとし、この海域での平均的な流向と流速を求めよ。

問題 8.4.3: 北緯  $30^\circ$  にある海峡の両岸の点 A と B での水位差を測ったところ、A 点の方が B 点よりも 10cm 高かった。水深は 100m、水は海面から底まで一様に流れているとし、海峡を通過する総流量を地衡流を仮定して求めよ。

### 8.4.3 Taylor-Proudman の定理と温度風平衡

回転水槽実験で容易に見られる面白い現象として、テラーのインクの壁/テラーの柱と呼ばれるものがある。ここでは水槽を念頭に回転軸は鉛直上向きとするが、鉛直スケール/水平スケール  $= \delta = D/L \ll 1$  という条件は用いない。もし、地衡流平衡にあれば、圧力の変化分 (静止状態での圧力を除いた部分) はコリオリ項と同程度であり、それは、加速度項より十分に大きいので、鉛直方向の方程式においても、加速度項は圧力項に比べて無視でき、さらに (8.36) を考慮すれば、その比は  $O(\delta^2 \varepsilon^2)$  となる。したがって、ロスビー数が小さければ、 $\delta = O(1)$  であっても、静水圧になる。ロスビー数、エクマン数が十分に小さいと仮定し、それらの項を無視すると方程式系は、

$$-fv = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad fu = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}, \quad (8.38)$$

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g, \quad (8.39)$$



$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (8.40)$$

となる。

ここで、(8.38) を  $z$  で微分すると

$$f \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial z} - \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial z} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad f \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 p}{\partial y \partial z} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial z} \frac{\partial p}{\partial y}. \quad (8.41)$$

さらに、(8.39) を用いると、

$$f \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{g}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} - \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial z} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad f \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{g}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial z} \frac{\partial p}{\partial y}. \quad (8.42)$$

密度が一様であるとする、

$$\frac{\partial v}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 0, \quad (8.43)$$

また、この場合、地衡流なので、 $\partial w / \partial z = 0$ 。即ち、密度が一様でロスビー数が小さい場合、流れ  $(u, v, w)$  は回転軸方向に一様になる。これをテラー・ブラウドマンの定理という。

ロスビー数が小さいということは、先に述べたように、系の持つ渦度 (惑星渦度) に比べて、相対渦度が小さいということである。相対渦度が小さいので、慣性系から見たときの流体の持つ正味の渦度 (絶対渦度) はほぼ  $f$  ということになる。渦度の値が  $f$  であり続けるためには、渦の伸縮 ( $\partial w / \partial z$ ) や渦度ベクトルを傾けること ( $\partial u / \partial z$ ,  $\partial v / \partial z$ ) があってはならない。逆の言い方をすると、それらの効果が小さくない ( $\partial u / \partial z = O(U/H)$ ,  $\partial v / \partial z = O(U/H)$ ,  $\partial w / \partial z = O(U/L)$ ) 場合には、 $f$  と同程度の大きさの相対渦度が生成されることになる。流体中にそのような大きな運動を引き起こすためには大きな仕事を流体にする必要がある (エネルギー方程式は、慣性系でも回転系でも同じである (問題 7.1.3))。すなわち、( $1/f$  よりも長い時間スケールで) 少し水をかき回したぐらいでは、上の制約を破ることは出来ないということである。なお、初期に無理やり軸を傾けた場合には慣性波が生じ、振動する (章末の参考 2)。

ところで、密度が一定でない場合には鉛直シアは存在可能である。(8.41) と静水圧の式 (8.39) を水平微分した式を用いると

$$f \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial p}{\partial z} \frac{\partial \rho}{\partial x} - \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial z} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad f \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho^2} \frac{\partial p}{\partial z} \frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial z} \frac{\partial p}{\partial y} \quad (8.44)$$

を得る。この式は §4.3 の渦度方程式 (4.16) で左辺を無視し、 $\omega = (0, 0, f)$  と置いたときの  $y, x$  成分と同じである。すなわち、鉛直シア流が惑星渦度ベクトルを傾けようとする効果と等圧面と等密度面を一致させようとして働くトルクが釣り合っているということである。また、地衡流の式 (8.38) の両辺に  $\rho$  をかけ、 $z$  で微分すると

$$\frac{\partial}{\partial z} [\rho v] = -\frac{g}{f} \frac{\partial \rho}{\partial x}, \quad \frac{\partial}{\partial z} [\rho u] = \frac{g}{f} \frac{\partial \rho}{\partial y} \quad (8.45)$$

を得る。これは水平の質量輸送の鉛直勾配が密度の水平勾配で決まることを意味する。他方、静水圧が成り立っているので、 $z$  を  $p$  で置き換えることも可能である。この場合、 $z$  を固定しての微分 (添え字  $z$  で表現) と  $p$  を固定しての微分 (添え字  $p$  で表現) の間には ( $d\rho(x, y, z, t) = d\rho(x, y, p, t)$  より)

$$\left(\frac{\partial\rho}{\partial x}\right)_z = \left(\frac{\partial\rho}{\partial x}\right)_p + \left(\frac{\partial\rho}{\partial p}\right)\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_z, \quad \left(\frac{\partial\rho}{\partial y}\right)_z = \left(\frac{\partial\rho}{\partial y}\right)_p + \left(\frac{\partial\rho}{\partial p}\right)\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)_z,$$

という関係が得られ、また、

$$\left(\frac{\partial\rho}{\partial z}\right) = \left(\frac{\partial\rho}{\partial p}\right)\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right) = -\rho g \left(\frac{\partial\rho}{\partial p}\right)$$

なので、これらを用いると、(8.42) は

$$\frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{g}{\rho f} \left(\frac{\partial\rho}{\partial x}\right)_p, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{g}{\rho f} \left(\frac{\partial\rho}{\partial y}\right)_p \quad (8.46)$$

となる。もし密度がほぼ一定であれば、(8.46) は  $z$  面上の微分でも同じになる。このような鉛直シアと密度の水平勾配の関係が得られるのは、静水圧の鉛直分布が密度で決まることと地衡流が圧力の水平傾度で決まることを考えれば当然である。この鉛直シアと水平密度勾配のバランスを温度風平衡という。これは、大気中の鉛直シアが温度差で決まっていることから名付けられたものである。海洋でも温度風平衡という。なお、(8.46) では  $p$  面上での水平微分を考えているが、 $z$  というのはジオイド基準の高さであるため観測において測定が困難であることも含め、鉛直の座標として高さ  $z$  ではなく圧力を使う方が簡便な場合が多い。

問題 8.4.4: 系が鉛直軸まわりに回転しているとき、ロスビー数を  $\varepsilon$ 、運動の鉛直長さスケールの水平長さスケールに対する比を  $\delta$  とすると  $O(\varepsilon^2\delta^2)$  の精度で静水圧が成立することを示せ。(8.4.3 節の第 1 段落参照)

問題 8.4.5:  $z$  軸まわりに  $\Omega$  で回転する容器の中の密度一様な水を考える。容器の深さは場所の関数であり、流体の厚さ (水面から底までの厚さ) を  $h(x, y)$  とする。地衡流平衡が完全に成り立っているとき  $u\partial h/\partial x + v\partial h/\partial y = 0$  が成立することを示せ。

問題 8.4.6: 回転水槽実験を考える。水槽は直径 30cm、深さ 20cm の円筒形とする。水をなみなみと入れ、15rpm で回転させた。水槽の底には (水槽の中心からずれたところに) 10 円玉を 5 枚重ねて作った円筒が沈めてある。水槽内の水は水槽と一緒に

回転している。水槽の回転速度を少しだけ遅くした（したがって、10円玉の円筒に相対的な遅い流れができる）。この10円玉の円筒は流れにどのように影響すると想像されるか？

問題 8.4.7: (8.41) から (8.44), (8.46) を導出せよ。

### 参考 1: 地衡流調節

一般に大気や海洋に与えられる強制は地衡流平衡した流れを作るわけではない。地衡流平衡していない流れから地衡流平衡した状態に移ることを地衡流調節という。この過程を見てみよう。

§8.1 に戻り、 $H$  も  $f$  も一様な無限に広い領域を考える。任意の初期擾乱は、この線形の問題では、§5.1.2 と同様、三角関数型の解の重ね合わせによって表現できる。違いは、§5.1.2(非回転系の線形問題) では定常解は圧力傾度力ゼロのもの(水面が平らな状態)だけであったが、この場合には、地衡流という圧力傾度力を伴う定常解が存在する(もしくは、定常流の解は必ず圧力傾度力を伴う)ことである。非回転系では、十分に長い時間が経れば、初期擾乱は波動として何処かに行ってしまう、初期擾乱が存在した場所の周囲は平らになるであろう。他方、回転系では、初期擾乱の内の地衡流平衡した部分がそこに残るはずである。

簡単な例題を考える。北半球を考える。 $y$  方向には一様であるとする。 $x$  方向には、初期に、水面に段差があり、その時、流れはゼロであったとする。すなわち、

$$\eta = \begin{cases} \eta_0 & \text{for } x \leq 0, \\ 0 & \text{for } x > 0, \end{cases} \quad v = 0 \quad (8.47)$$

この初期状態を  $x$  方向にフーリエ変換する。そうすると、各々の波数成分は、右向きに進む波と左向きに進む波、それにさらに、地衡流成分が加わったものになる。何故ならば、慣性重力波に伴う  $y$  方向の流れは波の進行方向に関わらず、波の峰を左に見る方向を向くため、初期に流れがない状態は、それをキャンセルする方向の地衡流(峰を右に見る流れ)を必要とするからである。時間が経つと、波の成分は伝わっていつてしまうため、 $x = 0$  近傍の波成分による変位並びに流れは時間とともに弱くなり、伝播することのない地衡流成分だけが残る。初期状態をフーリエ変換して解けば、原理的には解が求まるが、最終状態がどうなるかだけなら、もっと簡単に分かる。

(8.8)-(8.9) より、

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{f\eta}{H} \right) = 0 \quad (8.48)$$

が得られる。この括弧の中の量は、(線形化された)ポテンシャル渦度であり、この方程式は、それが時間的に変化しないことを示している(問題 8.1.1 を線形化することによっても得られる)。

$y$  方向に一様であることに注意すれば、(8.47), (8.48) より、

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{f\eta}{H} = \begin{cases} -\frac{f\eta_0}{H} & \text{for } x \leq 0 \\ 0 & \text{for } x > 0 \end{cases} \quad (8.49)$$

であり、最終的には地衝流バランスするので、

$$fv = g \frac{\partial \eta}{\partial x}. \quad (8.50)$$

(8.49) と (8.50) を連立させて、

$$\eta \rightarrow \eta_0 \quad \text{as } x \rightarrow -\infty, \quad \eta \rightarrow 0 \quad \text{as } x \rightarrow \infty, \quad (8.51)$$

で、かつ、 $x = 0$  で  $\eta$  と  $v$  が連続であるという条件の下に解くと、

$$\eta = \begin{cases} \eta_0 \left(1 - \frac{1}{2}e^{x/R}\right) & \text{for } x \leq 0 \\ \frac{1}{2}\eta_0 e^{-x/R} & \text{for } x > 0 \end{cases} \quad (8.52)$$

を得る。ここで、 $R = \sqrt{gH}/f$  はロスビーの変形半径。最終的に現れる流れはこの圧力場とつり合う地衝流である。

ロスビーの変形半径程度の幅の地衝流が残ることについてよくなされる説明は、初期の段差が重力波として  $\sqrt{gH}$  程度の速度で広がり、それが  $1/f$  時間程度立つと地衝流平衡に達する、それ故、その幅は、大体、重力波が  $1/f$  時間で達する距離、 $\sqrt{gH}/f$  になるというものである。

問題 8.A.1: (8.8)-(8.9) より (8.48) を導出せよ。

問題 8.A.2: (8.52) を導出せよ。

問題 8.A.3: 地衝流調節の前とそれが完了した後の、全力学的エネルギーの差を論ぜよ。

エネルギーは保存しているか? 保存していないとするとそれは何故か?

問題 8.A.4:  $y$  方向には一様で、初期条件が

$$v = \begin{cases} \left(1 - \frac{|x|}{L}\right)v_0 & \text{for } |x| \leq L, \\ 0 & \text{for } |x| > L, \end{cases} \quad \eta = 0$$

で与えられたときの調節の後に現れる地衡流を求めよ。また、 $L$ の大きさによって地衡流場がどのように変わるか、特に、ポテンシャルエネルギーと運動エネルギーの比がどのように変わるか、論ぜよ。

問題 8.A.5: 水面の変位  $\eta$  と流速  $(u, v)$  を観測したところ、ある瞬間では

$$\eta = \eta_0 \cos kx, \quad u = v = 0$$

であった。慣性周期よりも十分に長い時間で平均した時の水面の変位  $\bar{\eta}$  と平均の流れ  $(\bar{u}, \bar{v})$  はどうなるか?  $y$  方向には一様として求めよ。

## 参考 2: 慣性波

密度一定で、鉛直軸回りに  $f/2$  で回転する流体を考える。静水圧は仮定しない。線形化された方程式は

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + f \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p - g \hat{\mathbf{z}}, \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (8.53)$$

である。ここで、 $\mathbf{v}$  は 3 次元の流速ベクトル  $(u, v, w)$ 、 $\hat{\mathbf{z}}$  は鉛直単位ベクトル、 $\nabla$  も 3 次元である。これらの方程式から  $w$  の方程式を導出すると、

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) w + f^2 \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 0 \quad (8.54)$$

これは、波動方程式であり、 $w = w_0 e^{i(kx+ly+mz-\sigma t)}$  という平面波の解を代入すると、分散関係

$$\sigma = \pm \frac{fm}{|\mathbf{K}|} \quad (8.55)$$

を得る。ここで、 $\mathbf{K} = (k, l, m)$ 。このように、コリオリ力だけを復元力とする波を慣性波という。この分散関係式は内部重力波 (5 章参考 2) に良く似ている。水平波数と鉛直波数を入れ替えた形である。この波の振動数は  $f$  以下であり、 $m^2 \gg (k^2 + l^2)$ 、すなわち浅水近似が成立するときに、 $\sigma = \pm f$  となる。群速度は

$$\mathbf{c}_g = \mp \frac{f}{|\mathbf{K}|^3} (m \mathbf{K}_H - |\mathbf{K}_H|^2 \hat{\mathbf{z}}) \quad (8.56)$$

となり、波数ベクトルと群速度ベクトルは内部重力波と同様に直交する。ここで、 $\mathbf{K}_H$  は波数ベクトルの水平成分である。群速度の水平成分は水平波数ゼロ (慣性振動) と無限大の場合にのみゼロとなり、 $|\mathbf{K}_H| = |m|/2$  で最大値を持つ。

このように密度が一様で、かつ、静水圧を仮定しないと、慣性周期よりもゆっくりとした波動が現れる。ただ、水深と同程度の水平スケールであれば、慣性周期の倍かその程

度の周期なので、地衡流場と間違えることはない。水槽実験を行うと、慣性振動と思われる振動が良く見られるが、そのような中には、より長周期の慣性波も含まれているかも知れない。

なお、この波は、惑星渦度  $f$  が傾くことにより生じる渦度の水平成分が作る鉛直流が、(惑星渦度が正ならば) 渦度の水平成分の軸の右側で下降流、左側で上昇流となることにより、傾く方向が時計回りに回転することにより生じる。水平波数が大きくなると  $\sigma$  が小さくなるのは、波長が短いとすぐ隣では逆向きに傾き、逆向きの水平渦度ができ、鉛直流が互いに打ち消されるためである。

ところで、現実の大気海洋には、密度成層が存在する。上の問題に密度成層の効果を含める ( $w$  の式として (5.62) を用い、(5.63) の第2式も用いる) と、(8.54) の代りに、

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) w + \left[ f^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} + N^2 \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \right] w = 0 \quad (8.57)$$

が得られる。この式の分散関係は、

$$\sigma^2 = \frac{f^2 m^2 + N^2 |\mathbf{K}_H|^2}{|\mathbf{K}|^2} \quad (8.58)$$

となる。この場合、 $N^2 > f^2$  であれば、最小周波数は  $f$  であり、慣性周期より周波数の長い波は存在しない。これは §8.2 で扱った慣性重力波と同じ性質である。この波は5章参考2の内部重力波にコリオリ力の効果を含めた内部慣性重力波である。他方、 $N^2 < f^2$  であれば、最大周波数が  $f$ 、最小周波数が  $N$  となる。大気海洋では、通常状態では、 $N^2 > f^2$  なので、 $f$  より小さな周波数を持つ慣性波はあまり存在しそうにない。

問題 8.B.1: (8.53) より (8.54) を導出せよ。

問題 8.B.2: (8.54) より (8.55), (8.56) を導出せよ。

問題 8.B.3: (8.57) を導出せよ。

問題 8.B.4: (8.57) に支配される波の性質 (分散性や群速度など) を論ぜよ。

# Chapter 9

## エクマン境界層

大気海洋の中緯度での大規模運動の場はほぼ地衡流平衡にある。他方、§6 で見たように、粘性があれば、固体壁では流速はゼロにならねばならない。ここで、2つの疑問が持ち上がる。地衡流場は圧力の水平傾度があればそれに対応して生じる。したがって、流体層の底(地表、海底)で、圧力傾度があると地衡流は底で流速ゼロを満足しない。このことは、粘性力と圧力傾度力とコリオリ力3者のバランスによる薄い境界層が底に出来ることを示唆するが、それはどのような構造になるのか? 次にさらに重要な問題として、境界から離れたところ(内部領域という)では、ほぼ地衡流平衡にあるが、境界の影響(摩擦)による減衰はどのようにして地衡流平衡した領域に侵入するのか? 後者の問題は、特に、密度成層がないとしたとき、地衡流はテラー-プラウドマンの定理を満足し、鉛直シアが存在しなくなることを考えればその重要性が明らかになる。粘性項は水平流速の鉛直微分を含んでおり、もし、鉛直シアがなければ、底の摩擦の影響は粘性項を等して内部に侵入する事は出来ないからである。

### 9.1 エクマンスパイラル

簡単のために密度成層は無視する。系は鉛直軸周りに  $f/2$  の回転角速度で回転しており、 $z=0$  が流体層の底(境界)であるとする。境界から離れたところでは地衡流平衡にあるとする。境界では流速がゼロであるから、境界のそばには粘性項と圧力傾度力が同程度になる層が出来るはずである。その層内では鉛直エクマン数はほぼ1でなければならない。したがって、その厚さを  $\delta_e$  とすると、 $2\nu/(f\delta_e^2) = O(1)$  より、 $\delta_e = \sqrt{2\nu/f}$  となる。すなわち、この  $\delta_e$  程度の厚さで、流速はゼロに近づくことになる。方程式は、

$$-fv = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (9.1)$$

$$fu = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \quad (9.2)$$

$$0 = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial z} - g \quad (9.3)$$

となる。底から十分に離れると流速は地衡流速  $u = u_g = -\frac{1}{\rho_0 f} \frac{\partial p}{\partial y}$ ,  $v = v_g = \frac{1}{\rho_0 f} \frac{\partial p}{\partial x}$  に近づく。他方、 $z = 0$  では、固体壁での粘着条件、 $u = v = 0$  を考える。圧力の水平傾度は(9.3)より、 $z$ によらないから、 $u$ 、 $v$ をエクマン層内の流れと地衡流の和、 $u = u_e + u_g$ 、 $v = v_e + v_g$ と置くと、

$$-fv_e = \nu \frac{\partial^2 u_e}{\partial z^2} \quad (9.4)$$

$$fu_e = \nu \frac{\partial^2 v_e}{\partial z^2} \quad (9.5)$$

境界条件は

$$u_e = -u_g, v_e = -v_g \quad \text{at } z = 0, \quad u_e \rightarrow 0, v_e \rightarrow 0 \quad \text{as } z \rightarrow \infty \quad (9.6)$$

である。この問題は(9.5)に  $i$ (虚数単位)をかけ、(9.4)と足し合せ、 $V = u_e + iv_e$  についての方程式に書き直すと、§6.3.3の振動板による流れ(で  $\partial/\partial t = if$  と置いたもの)と同じ形の方程式になり、同様に解くことができる。解は

$$u = u_g + u_e = u_g[1 - e^{-z/\delta_e} \cos(z/\delta_e)] - v_g e^{-z/\delta_e} \sin(z/\delta_e) \quad (9.7)$$

$$v = v_g + v_e = v_g[1 - e^{-z/\delta_e} \cos(z/\delta_e)] + u_g e^{-z/\delta_e} \sin(z/\delta_e) \quad (9.8)$$

となる。例によって、 $f$ は正にとってある。流速ベクトルは、上に行くにしたがって、右まわりに回転する。 $z$ が大きくなるところでは、水平圧力傾度力と流速場は地衡流平衡にある。しかし、底近くでは摩擦の影響により、流速が小さくならなければならない。流速が小さくなるとコリオリ力と圧力傾度力が釣り合えなくなる。したがって、圧力傾度力により、圧力が高いところから圧力が低い方へ流れが生じることになる。これが、地衡流の方向に対してエクマン輸送が左向きに生じる理由である。

上のものは、地衡流が流れているときに底(地表)近くに出来るエクマン層であるが、大気海洋で重要となるエクマン層としては、もう一つ、海洋の表面(海面)近くにできるものがある。海洋上を風が吹くと海面は風により擦られることになる。すなわち、応力が与えられる。この場合、風応力ベクトルを  $\tau = (\tau^{(x)}, \tau^{(y)})$  とすると、境界条件は

$$\rho_0 \nu \frac{\partial u_e}{\partial z} = \tau^{(x)}, \quad \rho_0 \nu \frac{\partial v_e}{\partial z} = \tau^{(y)} \quad \text{at } z = 0, \quad u_e \rightarrow 0, v_e \rightarrow 0 \quad \text{as } z \rightarrow -\infty \quad (9.9)$$



となる。この境界条件の下、方程式 (9.4), (9.5) を解くと (演習問題 9.1.4)、

$$u = u_g + u_e = u_g + \frac{\delta_e}{2\rho_0\nu} e^{z/\delta_e} [(\tau^{(x)} + \tau^{(y)}) \cos(z/\delta_e) - (\tau^{(y)} - \tau^{(x)}) \sin(z/\delta_e)] \quad (9.10)$$

$$v = v_g + v_e = v_g + \frac{\delta_e}{2\rho_0\nu} e^{z/\delta_e} [(\tau^{(y)} - \tau^{(x)}) \cos(z/\delta_e) + (\tau^{(x)} + \tau^{(y)}) \sin(z/\delta_e)] \quad (9.11)$$

海面での流れは、北半球では風応力に対して右 45 度の方向を向き、深くなるにしたがって、流向がさらに右に回転していく像が得られる。

問題 9.1.1: 上の解、(9.7), (9.8)、は北半球について解いてある。南半球 ( $f < 0$ ) ではどうなるか?

問題 9.1.2: 回転水槽内でのエクマン層の厚さを調べる。水槽は 3.14 秒で 1 回転するとし、作業流体としては、水を考える。 $\delta_e$  を求めよ。

問題 9.1.3: 非回転系で同じ様な流れを作ること考える。圧力傾度力ベクトルがその絶対値は一定のまま、時間的に、鉛直軸回りに回転する場合を考えよう。上空では、時間変動項がこの圧力傾度力と常に釣り合っており、鉛直方向には静水圧が成り立っているとす。  $z = 0$  の境界近くに生じる流れの場を求めよ。

問題 9.1.4: 海洋では、海上に風が吹くと海面が擦られ、海面近くにエクマン層が生じる。海面に  $x$  方向に向いた応力  $\tau$  (水平方向に一様とする) が与えられたとして、海洋上層にできるエクマン層の解を求めよ。

## 9.2 エクマン輸送、エクマンポンピング

$u_e = u - u_g$  を  $z/\delta_e = 0$  から  $\infty$  まで積分すると、

$$M_e^{(x)} = \int_0^\infty u_e dz = -\frac{1}{2} \delta_e (u_g + v_g), \quad (9.12)$$

$$M_e^{(y)} = \int_0^\infty v_e dz = \frac{1}{2} \delta_e (u_g - v_g). \quad (9.13)$$

この  $M_e = (M_e^{(x)}, M_e^{(y)})$  をエクマン輸送ベクトルという。このベクトルは ( $f$  が正なら) 地衡流に対して、左  $135^\circ$  の方向を向く。

底での応力、 $\tau_b^{(x)} = \rho\nu \frac{\partial u}{\partial z}|_{z=0}$ 、 $\tau_b^{(y)} = \rho\nu \frac{\partial v}{\partial z}|_{z=0}$ 、は

$$\tau_b^{(x)} = \frac{\rho\nu}{\delta_e} (u_g - v_g), \quad \tau_b^{(y)} = \frac{\rho\nu}{\delta_e} (u_g + v_g) \quad (9.14)$$

となる。したがって、流体が境界から受ける応力 ( $-\tau_b$ ) の方向は地衝流の方向に対して、右  $135^\circ$ 、エクマン輸送ベクトルの向きはこの応力ベクトルの向きに対して、右  $90$  度に来る。これは、コリオリカと応力のバランスより容易に理解できる。

地衝流場が空間的に一様でない場合には、エクマン輸送ベクトルに収束発散が現れる。連続の式より、

$$w = - \int_0^z \left( \frac{\partial u_e}{\partial x} + \frac{\partial v_e}{\partial y} \right) dz \quad (9.15)$$

であるから、エクマン輸送の収束発散は鉛直流  $w$  を産み出すことを意味する。もし、エクマン層が、流体層全体に比べて十分に薄ければ、

$$w_e = - \int_0^\infty \left( \frac{\partial u_e}{\partial x} + \frac{\partial v_e}{\partial y} \right) dz = - \left( \frac{\partial M_e^{(x)}}{\partial x} + \frac{\partial M_e^{(y)}}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} \delta_e \left( \frac{\partial v_g}{\partial x} - \frac{\partial u_g}{\partial y} \right) \quad (9.16)$$

という鉛直流がエクマン層の上端に出来、地衝流の成り立つ領域 (内部領域という) に流体を送り出す、もしくは吸い込むことになる。これを Ekman pumping という。  $w_e$  は地衝流場の渦度場に比例し、高気圧性循環ならば、  $w_e < 0$ 、低気圧性なら  $w_e > 0$  となる。これは、高気圧では、エクマン層内では、渦の中心から外に向かって風が吹き出し、それを補うためにエクマン層上端では下降流、他方、低気圧では、逆に上昇流を作ることになる。高気圧では天気が良い理由である。

他方、海面での応力 ( $\tau_s^{(x)}(x, y), \tau_s^{(y)}(x, y)$ ) が与えられた時のエクマン輸送と海洋表層エクマン層下端での Ekman pumping 速度は、

$$M_e^{(x)} = \frac{1}{\rho f} \tau_s^{(y)}, \quad M_e^{(y)} = -\frac{1}{\rho f} \tau_s^{(x)}, \quad w_e = \frac{1}{\rho f} \left[ \frac{\partial \tau_s^{(y)}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_s^{(x)}}{\partial y} \right] \quad (9.17)$$

となる。すなわち、エクマン輸送は風応力ベクトルに対して (北半球では) 直角右向きで、海面風応力の回転に比例する  $w_e$  が生じる。

問題 9.2.1 (9.17) を求めよ。

問題 9.2.2 円筒形の回転水槽を考える。水槽は 3.14 秒で 1 回転していたとする。水槽中の水は、水槽と同じ回転方向に、水槽に相対的に約 1 分で 1 回転していたとする (水槽の外 - 静止系 - から見ると水は約 3 秒で 1 回転)。  $w_e$  はどの程度になるか。

### 9.3 スピニアップ・スピンドウンと循環の保存

回転系においては、直接摩擦の影響を受けるのは、  $\delta_e$  という薄い層内だけである。にもかかわらず、(9.14) から明らかなように地衝流速に比例し、そして、それを減速させる方向

の応力が  $z = 0$  で働くのであるから、何らかの形で、エクマン層は地衡流場を減速させるはずである。それを考えるために、ここでは時間変動項を残した方程式で考える。

簡単のために線形化する。方程式系は、

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + f \hat{z} \times \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla_{HP} p + \nu \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial z^2}, \quad (9.18)$$

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g, \quad (9.19)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (9.20)$$

である。ここで、 $\mathbf{u}$  は水平流速ベクトルで、 $\nabla_H$  は水平の微分演算子、 $\hat{z}$  は  $z$  方向の単位ベクトルである。密度は一様であるとする。また、時間変動周期は  $1/f$  よりも十分に遅いとする。すなわち時間変動項はコリオリ項に比べて  $\varepsilon_T$  程度の大きさであるとする。

密度は一様なので、鉛直シアは粘性項のみによって生じる。すなわち、鉛直シアが現れるのは、境界から  $\delta_e$  程度の厚さに限られる。ここで、流体層の厚さ  $H$  は  $\delta_e$  よりも十分に厚いとする。まず、 $\mathbf{u}$  を  $z$  に依存する (底から離れると急速にゼロに近づく) 部分、 $\hat{\mathbf{u}}$ 、と依存しない部分、 $\bar{\mathbf{u}}$ 、に分ける。方程式系は

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} + f \hat{z} \times \bar{\mathbf{u}} = -\frac{1}{\rho} \nabla_{HP} p, \quad (9.21)$$

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{u}}}{\partial t} + f \hat{z} \times \hat{\mathbf{u}} = \nu \frac{\partial^2 \hat{\mathbf{u}}}{\partial z^2}, \quad (9.22)$$

$$\nabla_H \cdot \hat{\mathbf{u}} + \nabla_H \cdot \bar{\mathbf{u}} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (9.23)$$

となる。境界条件は  $z = 0$  で  $\bar{\mathbf{u}} + \hat{\mathbf{u}} = 0$ 、 $z \gg \delta_e = \sqrt{2\nu/f}$  で  $\hat{\mathbf{u}} \rightarrow 0$  である。

$\bar{\mathbf{u}}$  はほぼ地衡流平衡にあるとするが、時間発展をするということは若干地衡流からずれているということである。そこで、 $\bar{\mathbf{u}} = \mathbf{u}_g + \mathbf{u}_a$ 、 $|\mathbf{u}_a|/|\mathbf{u}_g| = O(\varepsilon_T)$  とする。ここで、 $\mathbf{u}_g$  は圧力場と地衡流平衡にある部分、すなわち、 $f \hat{z} \times \mathbf{u}_g = -\frac{1}{\rho} \nabla_{HP} p$  である。時間微分項の中の  $\mathbf{u}_a$  を無視すると、(9.21) は

$$\frac{\partial \mathbf{u}_g}{\partial t} + f \hat{z} \times \mathbf{u}_a = 0 \quad (9.24)$$

となる。この式は、地衡流からの微小なずれによって、地衡流場が変化することを意味している。この方程式の rotation を取ると、その  $z$  成分は

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial v_g}{\partial x} - \frac{\partial u_g}{\partial y} \right) + f \left( \frac{\partial u_a}{\partial x} + \frac{\partial v_a}{\partial y} \right) = 0 \quad (9.25)$$

を得る。この式は、4章で見た循環の保存 (ポテンシャル渦度の保存) を表している。すなわち、水平流速が収束すれば (流体柱が伸びれば)、もともと持っている渦度が増大する、発散すれば減少するという式である。ただし、ロスビー数の小さい世界を考えているので、流体の持つ渦度はほぼ系の持つ渦度 (惑星渦度) に等しいとなっている。

さて、この式を  $z = 0$  から  $z = H$  まで積分し、さらに、連続の式 (9.23) を用いると

$$H \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial v_g}{\partial x} - \frac{\partial u_g}{\partial y} \right) = f \left( w|_{z=H} + \int_0^H \nabla_H \cdot \hat{\mathbf{u}} dz \right), \quad (9.26)$$

が得られる。ここで、 $w|_{z=H}$  は  $z = H$  での鉛直流速 (強制項として入れておく)。他方、 $\hat{\mathbf{u}}$  の式 (9.22) においても、時間変動項は小さい (コリオリ項に比べて  $\varepsilon_T$  程度) なので、(9.22) は  $O(\varepsilon_T)$  の誤差で (9.4), (9.5) に等しい。したがって、 $\hat{\mathbf{u}} \simeq \mathbf{u}_e$ 。 (9.26) は

$$H \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial v_g}{\partial x} - \frac{\partial u_g}{\partial y} \right) = f \left( w|_{z=H} + \nabla_H \cdot \int_0^H \mathbf{u}_e dz \right) \quad (9.27)$$

となり、Ekman pumping 速度  $w_e$  を用いれば、

$$H \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial v_g}{\partial x} - \frac{\partial u_g}{\partial y} \right) = f (w|_{z=H} - w_e) \quad (9.28)$$

と書ける。このように書くと、この問題は、厚さ  $H$  の非粘性流体の下面の境界 ( $z = 0$ ) で  $w_e$  という鉛直流速が与えられた問題と等価であることが分かる。つまり、流体層全体に比べて無限に薄いエクマン層内のエクマン輸送の収束と発散にともなって鉛直流が作られ、その鉛直流故にほぼ地衡流平衡した内部領域で水平流速の収束と発散を生じ、その収束・発散によって地衡流場が時間変化するという形である。

$z = H$  での鉛直流速 ( $w|_{z=H}$ ) を無視し、(9.28) に (9.16) を代入すると、

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial v_g}{\partial x} - \frac{\partial u_g}{\partial y} \right) = -\frac{f\delta_e}{2H} \left( \frac{\partial v_g}{\partial x} - \frac{\partial u_g}{\partial y} \right) \quad (9.29)$$

右辺も渦度で表される。この式の解は  $e^{-f\delta_e t/2H}$  に比例するので、内部領域の渦度は  $\frac{2H}{f\delta_e}$  の時間スケールで減衰することが分かる。これをスピンドアウンタイムという。また、この減衰による変動から、 $\varepsilon_T$  は  $\delta_e/H$  のオーダーであることが分かる。逆に言うと、ほぼ地衡流であるためには、 $\delta_e/H \ll 1$  でなければならない。このスピンドアウンタイムは、水槽実験等で、回転水槽の回転に内部の水を馴染ませる (水槽と一緒に回転するようになる) のに必要な時間 (スピンアップタイム) の目安を与える。

ところで、上の議論においては、渦度場のエクマン層によるスピンドアウンを論じた。では、渦度のない流れにはエクマン層は影響しないのであろうか? この場合には、(9.24) へ

戻れば良い。たとえば、 $x$  方向に流れる一様流  $(u_g, 0)$  があったとする。この場合、 $w_e = 0$  ではあるが、エクマン層内には地衡流を横切る方向のエクマン輸送  $M_e^{(y)}$  が存在する。流体量の保存を考えると、どこか、 $-y$  方向の点 (例えば  $y$  方向の境界 = 鉛直壁) でエクマン層に水が供給され、 $+y$  方向のどこかで、水が抜き出されねばならない。そして、抜き出された水は内部領域を通過して、供給地点へと戻ると考えるのが自然であろう。すなわち、

$$v_a = -\frac{1}{H} M_e^{(y)} \quad (9.30)$$

が存在し、それによって、流速  $u_g$  は遅くなる。

問題 9.3.1: 回転水槽を考える。水槽は 3.14 秒で 1 回転するとし、水深は 20cm であったとする。  $\frac{2H}{f\delta_e}$  を求めよ。

問題 9.3.2: 回転角速度  $\Omega_0$  で回転する円筒形的水槽を考える。水槽の回転角速度を  $\Delta\Omega$  だけ速くした (ただし、 $\Delta\Omega \ll \Omega_0$ )。水槽に相対的な (内部領域の) 流れの場の時間発展を求めよ。

問題 9.3.3: 上の問題 9.3.2 のスピニアップの過程における水槽の中心を通る鉛直断面内での流れの模式図を描け。ただし、側壁境界から離れた部分だけで良い。

問題 9.3.4: 回転角速度  $\Omega_0$  で回転する円筒形的水槽を考える。水槽から少しずつ水を抜いた。水槽の水平断面積を  $A$ 、水深を  $H$ 、抜く水の量を  $Q$  とする。水槽に相対的な (内部領域の) 定常状態での流れの場並びに水を抜きはじめてからその定常状態に至るまでの流れの場の時間発展を求めよ。ただし、我々の観測する時間内での  $H$  の変化は、初期の水深に比べて十分に小さいとする。また、水を抜くことによる影響は、水位のゆっくりとした変化のみに現れるとする。

# Chapter 10

## 準地衡流渦度方程式

前節では、ほぼ地衡流平衡にある流れの場合へのエクマン層の影響を見た。そのような場合には、エクマン層は全水深に比べて非常に薄い層となり、その地衡流場への影響はエクマン層上端からの鉛直流による渦管の断面積の増大減少（非地衡流的水平流速の収束発散）を通して行われる。すなわち、§4.2 で見た循環の保存に従っている（ただし、この場合の渦度は宇宙から見た渦度、 $\partial v/\partial x - \partial u/\partial y + f$ ）。§4.2 で既に見たように、断面積の増大減少は、質量の保存（渦管の長さ  $h \times$  渦管の断面積  $A \times$  密度 = 一定）より、渦管の長さの伸び縮みで表すことができる。すなわち、密度一定ならば、循環の保存は、(4.14) と同じく、ポテンシャル渦度、

$$Q = \frac{1}{h} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} + f \right) \quad (10.1)$$

の保存、

$$\frac{D}{Dt} \left\{ \frac{1}{h} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} + f \right) \right\} = 0 \quad (10.2)$$

と書くこともできる。ここで、 $h$  は総水深ではなく、上下2つの物質面で挟まれた流体層の厚さである。 $f$  は自転に伴う渦度なので、惑星渦度、 $\partial v/\partial x - \partial u/\partial y$  は渦度  $f$  を持つ回転する座標系から見た（回転する系に）相対的な渦度なので、相対渦度、両者の和は絶対座標系から見た渦度なので、絶対渦度と呼ばれる。この式は、底近くの薄い層であるエクマン層の上端に上昇流があれば、その上にある地衡流平衡した領域（内部領域）では渦柱が縮み高気圧性（系の回転と逆回りの）循環が、下降流なら伸ばされて低気圧性（系の回転と同方向の）循環が生じるということを意味する。このポテンシャル渦度の保存を地衡流で表したのが準地衡流渦度方程式である。

## 10.1 準地衡流渦度方程式 ( $f$ 平面)

流体層の下端、もしくは上端で、鉛直流があれば地衡流場は変化する。この鉛直流を作るものはエクマン層だけではなく、底が凸凹していれば、それに流れがぶつかることによっても(斜面を昇ったり下ったりする流れができるので)鉛直流が生じる。流体層の底の  $z$  座標が、 $z = -H_0 + \eta_b(x, y)$  である ( $H_0$  は定数) とすると、それによる鉛直流は

$$w_b = u \frac{\partial \eta_b}{\partial x} + v \frac{\partial \eta_b}{\partial y} \quad (10.3)$$

と表せる。また、流体層の上端が水面である ( $z = \eta(x, y, t)$ ) とすると、そこでの鉛直流は

$$w_s = \frac{\partial \eta}{\partial t} + u \frac{\partial \eta}{\partial x} + v \frac{\partial \eta}{\partial y} \quad (10.4)$$

と書ける。(ここでは、「水面」としたが、以下の議論は、ある等温位面とその下の流体層と思えば、大気でも力学の根本は同じである)。もし、底の地形も、水面の変位も流体層の厚さ  $H_0$  に比べて十分に小さいとすると、これらの鉛直流は平均的な底 ( $z = -H_0$ ) と平均的な水面 ( $z = 0$ ) での  $w$  と考えることができる。地衡流平衡にある場合には、エクマン層もまた  $H_0$  に比べて十分に薄いので、 $z = -H$ 、 $z = 0$  での鉛直流はこれらにエクマン層による鉛直流が加わったものとして定義できる。すなわち、底での鉛直流は

$$w_{bottom} = \frac{1}{2} \delta_e \left( \frac{\partial v_g}{\partial x} - \frac{\partial u_g}{\partial y} \right) + u_g \frac{\partial \eta_b}{\partial x} + v_g \frac{\partial \eta_b}{\partial y} \quad (10.5)$$

であり、水面では、水面でのエクマン層からの鉛直流を  $w_e$  と書けば、

$$w_{surface} = \frac{\partial \eta}{\partial t} + u_g \frac{\partial \eta}{\partial x} + v_g \frac{\partial \eta}{\partial y} + w_e \quad (10.6)$$

となる。もし、水面での応力を  $(\tau^{(x)}, \tau^{(y)})$  と書けば、演習問題 9.2.1 の答えを用いて、

$$w_e = \frac{1}{\rho_0 f_0} \left( \frac{\partial \tau_s^{(y)}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_s^{(x)}}{\partial y} \right)$$

と書ける。なお、ここで、 $f$  の代わりに  $f_0$  と書いたが、これは、ここでの扱いでは  $f$  を空間的に一定と見做すことを強調するためである(地球上では  $f$  は緯度の関数である。ただし、狭い範囲で考えれば一定と見做すこともできる)。

内部領域においては、ほぼ地衡流平衡にあるので、水平流速  $\mathbf{u}$  は  $z$  に依存ないと考えて良い。したがって、方程式は、

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} + f_0 \mathbf{k} \times \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p, \quad (10.7)$$

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g, \quad (10.8)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (10.9)$$

(10.7) 式では、コリオリ項と右辺の圧力傾度力の項が実際には釣り合っている。そして、左辺、第1項はコリオリ項に比べて  $\varepsilon$  のオーダーである。そこで、これらの大きな項を消去するために渦度を取る。そうすると、(10.7) は

$$\frac{D}{Dt} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \left( f_0 + \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0 \quad (10.10)$$

となる。ほぼ地衡流平衡にあるということより相対渦度は惑星渦度に比べて十分に小さい ( $\varepsilon$  のオーダー) ので、 $f_0 + \partial v/\partial x - \partial u/\partial y$  を  $f_0$  で近似し、さらに  $z = -H_0$  から  $z = 0$  まで積分すると

$$H_0 \frac{D}{Dt} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) - f_0 (w_{surface} - w_{bottom}) = 0 \quad (10.11)$$

を得る。この方程式に、(10.5) と (10.6) を代入すると

$$H_0 \frac{D}{Dt} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{f_0}{H_0} (\eta - \eta_b) \right) = f_0 w_e - \frac{f_0}{2} \delta_e \left( \frac{\partial v_g}{\partial x} - \frac{\partial u_g}{\partial y} \right) \quad (10.12)$$

を得る。また、ほぼ地衡流平衡にあるので、

$$u \simeq u_g = -\frac{1}{f_0} \frac{\partial p}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v \simeq v_g = \frac{1}{f_0} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (10.13)$$

と、 $u, v$  を流線関数で表すことができる。ここで、 $\psi$  は地衡流流線関数 ( $= p/\rho_0 f_0$ )。また、水平微分演算子を  $\nabla_H$  と書くと、 $\nabla_H p = \rho_0 g \nabla_H \eta_s$  なので、水面の変位は  $\eta_s = f_0 \psi / g$  と書ける。これを用いると (10.12) の左辺の括弧の中は

$$q = \nabla_H^2 \psi - \frac{f_0^2}{g H_0} \psi + \frac{f_0}{H_0} \eta_b \quad (10.14)$$

となり、方程式は

$$\frac{\partial q}{\partial t} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial q}{\partial y} = -\frac{f_0}{2 H_0} \delta_e \nabla_H^2 \psi + \frac{f_0}{H_0} w_e \quad (10.15)$$

という風に、 $\psi$  (もしくは  $\eta_s$ ) のみに関する方程式に帰着できる。これは、準地衡流渦度方程式 (もしくは、準地衡流方程式、準地衡流ポテンシャル渦度方程式) と呼ばれる。

ポテンシャル渦度  $q$  の第1項は相対渦度の項で、第2項は水面変位に伴う流体柱の伸縮の項である。高気圧 ( $\psi > 0$ ) であれば流体の厚さは厚くなり、低気圧 ( $\psi < 0$ ) であれば薄くなるので、高気圧に対しては伸縮項も負、低気圧に対しては正である。ポテンシャル



渦度が負で流れのない状況を考えるとそれは流体の層が厚いということである。その状況で手を離せば、流体柱は縮み、それに伴い高気圧性の循環が生じることになる。それ故、ポテンシャル渦度が負のところでは相対渦度も伸縮項も負、正のところでは正になる。この第2項の係数の逆数の平方根、 $\sqrt{gH_0}/f_0$ 、は空間の次元を持っており、ロスビーの変形半径である。このスケールは以前述べたように  $1/f_0$  時間の間に浅水重力波が伝播できる距離を表している。水面がでこぼこしていると、そのでこぼこは重力波として広がる。しかし、 $1/f_0$  時間程度たつと地球自転の効果がきいてきて、地衡流平衡に近づく。地衡流平衡に達すれば、それ以上、水面の変位は広がれなくなる。したがって、変形半径というのは、水面の変化の空間的広がりの目安を与える。また、ポテンシャル渦度  $q$  の第3項は底地形による渦柱の伸縮を表す。右辺は、底と水面のエクマン層に由来する部分であり、粘性や強制力がないとすれば、ゼロになる。

なお、準地衡流渦度方程式は Jacobian  $J(A, B) = (\partial A/\partial x)(\partial B/\partial y) - (\partial A/\partial y)(\partial B/\partial x)$  を用いて、

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \nabla_H^2 \psi - \frac{f_0^2}{gH_0} \psi \right) + J \left( \psi, \nabla_H^2 \psi + \frac{f_0}{H_0} \eta_b \right) = -\frac{f_0}{2H_0} \delta_e \nabla_H^2 \psi + \frac{f_0}{H_0} w_e \quad (10.16)$$

と表されることも多い。

問題 10.1.1: もし定常で、かつ、粘性や強制力が無視できれば、(10.16) 式は、

$$q = G(\psi)$$

と書ける、すなわち、 $q$  と  $\psi$  の等値線は一致することを示せ。

問題 10.1.2: 我々の回転水槽実験を考えたとき、変形半径はどの程度になるか計算せよ。

## 10.2 底の傾斜と惑星 $\beta$ : $\beta$ 平面上での準地衡流渦度方程式

前節で導出した準地衡流渦度方程式は、 $f$  一定の場合についてであった。現実の地球はしかし丸いので、 $f$  は  $f = 2\Omega \sin \theta$  (ここで、 $\theta$  は緯度) であり、これもまた空間的に変化する。その影響について考える。

ポテンシャル渦度は

$$Q = \frac{f + \zeta}{h} \quad (10.17)$$

である。もし、流体層の厚さが一定 ( $h = H_0$ ) で、 $f$  が  $y$  の関数 ( $y$  方向が北であるとする) なら、 $q$  が流体粒子毎に一定に保たれるということは、流体が北に動けば  $f$  が大きくなるので、 $\zeta$  は小さくなる、もしくは、初期位置で  $\zeta = 0$  ならば、北に流体が動けば、 $\zeta$  が負

になるということを意味する。これは、 $f$  が一定の時に流体が浅い方に動く場合と定性的には同じである。この  $f$  の南北変化の影響を  $\beta$  効果 (もしくは、惑星  $\beta$  効果) といい、地形による流体層の厚さの変化の影響を地形性  $\beta$  効果という。

ある緯度  $\theta_0$  の回りでの南北移動を考える。その移動距離が地球半径よりも十分に小さいとすれば、それによる緯度変化を  $\theta'$  とし、

$$f = 2\Omega \sin \theta = 2\Omega \sin(\theta_0 + \theta') \simeq 2\Omega \sin \theta_0 + 2\Omega \cos \theta_0 \theta' + O(\theta'^2)$$

と展開できる。緯度  $\theta_0$  の点から  $\theta_0 + \theta'$  の点までの南北距離を  $y$  とすると、 $\theta' = y/a$  (ここで、 $a$  は地球半径) なので、 $f = f_0 + \beta y$  と書ける。ここで、 $\beta = \frac{2\Omega}{a} \cos \theta_0$ 。  $|\beta y| \simeq \zeta \ll f_0$  として、§10.1 と同様に方程式を変形すると、(10.14) の代わりに

$$q = \nabla_H^2 \psi - \frac{f_0^2}{gH_0} \psi + \beta y + \frac{f_0}{H_0} \eta_b \quad (10.18)$$

を得る。この  $q$  の発展の方程式は、§10.1 のと同様 (10.15) になる。この  $q$  の表式は、(10.17) 式に、 $f = f_0 + \beta y$ 、 $h = H_0 + \eta_s - \eta_b$  を代入し、 $|\beta y| \sim |\zeta| \ll |f_0|$ 、 $|\eta_s| \ll H_0$ 、 $|\eta_b| \ll H_0$  として、展開することによっても得ることができる。すなわち、

$$Q = \frac{f_0 + \beta y + \zeta}{H_0 + \eta_s - \eta_b} \simeq \frac{f_0}{H_0} + \frac{1}{H_0} \left( \beta y + \zeta - \frac{f_0}{H_0} (\eta_s - \eta_b) \right) \quad (10.19)$$

として、 $\zeta$  と  $\eta_s$  を  $\psi$  で表し、定数部分を無視すれば、(10.18) を得る。この式には、底の傾きと  $f$  の変化が同じ形が入ってきており、 $f$  一定、 $h = H_0 - \beta y H_0 / f_0$  としたときと、 $h = H_0 =$  一定、 $f = f_0 + \beta y$  としたときに方程式は同じになる。このことから、地球が丸いという効果 ( $f$  が緯度の関数) もまた、底が傾いている場合と同じであることが判る。また、このことは、回転数を空間の関数とすることができない回転水槽でも、底を傾けることによって地球が丸いという効果を考えることができるということの意味する。

問題 10.2.1: 回転水槽で地球が丸いという効果を再現したい。 $f > 0$  の時、北はどちらになるか? また、南半球のモデル ( $f < 0$ ) の時はどうか?

問題 10.2.2: 北緯 40 度での、 $f_0$  と  $\beta$  を求めよ。また、そこで流体が南北に 100km 動いたとしたときの相対渦度の変化を求めよ。ただし、渦柱の伸縮の項 ( $\frac{f_0^2}{gH_0} \psi$ ) は無視する。

## 10.3 成層の影響

### 10.3.1 多層モデル

この授業では密度成層の効果はあまり論じてこなかったが、成層がある場合についても少しだけ考えてみよう。ここでは、流体は非圧縮性であるとし、成層の効果は密度の異な

るいくつかの層 (各層の内部での密度は一樣) が縦に重なったものとして近似することにする。このようなモデルを層モデルという。ポテンシャル渦度は物質面に挟まれた密度一樣な層の厚さを  $h$  とすることにより、(10.1) の形に書ける。他方、密度の不連続面 (密度界面) は物質面である。したがって、各層毎に (10.1) はラグランジジュ的に保存する。また、この層内での流れはほぼ地衡流平衡にあるので、圧力場によって表現できる。したがって、この層の上面と下面の密度界面の高さ (深さ) の変位が圧力のみ関数として表現できれば、密度一樣な 1 層の問題と同様に、圧力 (流線関数) のみで場の発展が記述できることになる。

まず、下から  $j$  番目の層を考える。全層に流れが無い場合のその層の下面の密度界面の底からの高さを  $Z_{j-1}$ 、層の厚さを  $H_j$  とする (したがって、 $Z_0 = 0$ ,  $Z_j = Z_{j-1} + H_j$ )。流れがある場合には密度面の高さは一般には変化するが、その変位を下面、上面それぞれについて、 $\eta_{j-1}$ 、 $\eta_j$  と書く。第  $j$  層のポテンシャル渦度  $Q_j$  は

$$Q_j = \frac{1}{H_j + \eta_j - \eta_{j-1}} \left( \frac{\partial v_j}{\partial x} - \frac{\partial u_j}{\partial y} + f \right) \quad (10.20)$$

と書ける。ここで、 $u_j, v_j$  の添字の  $j$  は  $j$  層での流速であることを意味する。 $|\eta_j - \eta_{j-1}| \ll H_j$  で、かつ、準地衡流近似が可能であれば、準地衡流のポテンシャル渦度は、上と同様にして、

$$q_j = \nabla_H^2 \psi_j + \beta y - \frac{f_0(\eta_j - \eta_{j-1})}{H_j} \quad (10.21)$$

密度界面変位、 $\eta_j, \eta_{j-1}$  とこの層とその上下の層での圧力  $p_{j-1}, p_j, p_{j+1}$  との関係は、水面変位と圧力関係と同じように、静水圧の式

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$$

を積分することによって得ることができる。第  $j$  層の密度を  $\rho_j$ 、第  $j-1$  層の密度を  $\rho_{j-1}$  と書くことにし、第  $j-1$  層内に基準となる  $x, y, t$  によらないある高さ  $z_{j-1}$  を定め、そこから第  $j$  層内の (同じく  $x, y, t$  によらない) 基準の高さ  $z_j$  まで積分すると

$$\begin{aligned} p|_{z=z_j} - p|_{z=z_{j-1}} &= -\rho_{j-1}g(Z_{j-1} + \eta_{j-1} - z_{j-1}) - \rho_jg(z_j - Z_{j-1} - \eta_{j-1}) \\ &= -(\rho_{j-1} - \rho_j)g\eta_{j-1} - \rho_{j-1}g(Z_{j-1} - z_{j-1}) - \rho_jg(z_j - Z_{j-1}). \end{aligned}$$

ここで、第 2 項、3 項は  $(x, y, t)$  に依存しないので関係ない。したがって、密度面の変位は、静水圧部分を除いた両層の圧力差で決まる。 $j-1$  層と  $j$  層間の密度差を  $\Delta\rho_{j-1} \ll \rho_0$  とし ( $\rho_0$  は平均の密度)、地衡流流線関数 ( $\psi_j = p_j/\rho_0 f_0$ ) を用いると、

$$\eta_{j-1} = -\frac{\rho_0 f_0}{\Delta\rho_{j-1} g} (\psi_j - \psi_{j-1}) \quad (10.22)$$

となる。すなわち、第  $j-1$  層に運動がなく ( $\psi_{j-1} = 0$ )、第  $j$  層に低気圧性の渦  $\psi_j < 0$  があれば、 $\eta_{j-1}$  は盛り上がり、また、第  $j$  層に運動がなく、第  $j-1$  層に高気圧性の渦がある場合にも、同様に  $\eta_{j-1}$  は盛り上がるということである。

さて、 $\eta_j$  についても同様に書けるので、これらを (10.21) に代入すると

$$q_j = \nabla_H^2 \psi_j + \beta y - \frac{\rho_0 f_0^2}{\Delta \rho_{j-1} g H_j} (\psi_j - \psi_{j-1}) - \frac{\rho_0 f_0^2}{\Delta \rho_j g H_j} (\psi_j - \psi_{j+1}) \quad (10.23)$$

もし、層毎の密度差を同じにすれば、

$$q_j = \nabla_H^2 \psi_j + \beta y - \frac{\rho_0 f_0^2}{\Delta \rho g H_j} (2\psi_j - \psi_{j-1} - \psi_{j+1}) \quad (10.24)$$

を得る。この  $q_j$  が各層毎にラグランジュ的に保存する。すなわち、

$$\frac{\partial}{\partial t} q_j + J(\psi_j, q_j) = 0 \quad (10.25)$$

である。この方程式がこの層内の流れを記述するのであるが、この第  $j$  層の運動を記述する方程式には  $\psi_{j-1}$  と  $\psi_{j+1}$  が含まれる。すなわち、ある層の流れを考えると、他の層の流れも考えなければいけない。  $M$  層のモデルでは  $M$  連立方程式になる。

### 10.3.2 連続成層モデル

密度が連続的に変化している場合 (連続成層) を表現するには、(10.23) で  $H_j$  をどの層でも同じ ( $H_j = \Delta H$ ) に取り、 $\Delta \rho_j / \rho_0 \Delta H$  を有限に保ったまま、層の数を無限に増やせばよい。この時、 $\lim_{\Delta H \rightarrow 0} \Delta \rho_j / \Delta H = d\bar{\rho}/dz$  ( $\bar{\rho}(z)$  は静止状態での密度) であることに注意すると、

$$q = \nabla_H^2 \psi + \beta y + \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{f_0^2}{N^2} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right\} \quad (10.26)$$

となる。連続成層なので、 $\psi, q$  ともに、 $z$  の関数になる。ここで、 $N$  は浮力振動数 (5章参考2参照)。なお、鉛直流はある密度  $\rho$  の面の高さの静止状態からの変位を  $\eta$  とすると、その高さでは  $w = d\eta/dt$  である。他方、 $\eta$  は (10.22) のようにその上下の圧力差で決まるので、

$$\eta = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\rho_0 f_0}{g[\rho(\eta + \delta) - \rho(\eta - \delta)]} [\psi(\eta + \delta) - \psi(\eta - \delta)]$$

と書ける。準地衡流近似の下では  $\eta$  は小さく、

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{[\rho(\eta + \delta) - \rho(\eta - \delta)]}{2\delta} \simeq \frac{d\bar{\rho}}{dz}, \quad N^2 = -\frac{g}{\rho_0} \frac{d\bar{\rho}}{dz}$$

等に注意すると、

$$\eta = -\frac{f_0}{N^2} \frac{\partial \psi}{\partial z}.$$

したがって、

$$w = - \left[ \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \right] \left\{ \frac{f_0}{N^2} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right\} \quad (10.27)$$

を得る。連続成層の場合の底面での境界条件は、地形やエクマン層による鉛直流をこの  $w$  に等しいと置けば良い。もしそれらの効果がなければ、底での境界条件は、

$$\left[ \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \right] \left\{ \frac{f_0}{N^2} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right\} = 0 \quad (10.28)$$

となる。

### 10.3.3 2層モデル

層の数というのは鉛直構造をどれだけ細かく分解するかということに対応する。現実的には、上層と下層で流れの向きが逆というものまでを分解すれば十分な場合が多いが、そのような場合には、2層だけでよい。2層の場合には、第1層に底地形とエクマン層、第2層に水面の変位と水面での鉛直流(強制) $w_e$ も含めると

$$\frac{\partial}{\partial t} q_1 + J(\psi_1, q_1) = - \frac{f_0 \delta_e}{2H_1} \nabla_H^2 \psi_1 \quad (10.29)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} q_2 + J(\psi_2, q_2) = \frac{f_0 w_e}{H_2} \quad (10.30)$$

ここで、 $q_j$  は

$$q_1 = \nabla_H^2 \psi_1 - \frac{\rho_0 f_0^2}{\Delta \rho g H_1} (\psi_1 - \psi_2) + \beta y + \frac{f_0}{H_1} \eta_b \quad (10.31)$$

$$q_2 = \nabla_H^2 \psi_2 - \frac{f_0^2}{g H_2} \psi_2 - \frac{\rho_0 f_0^2}{\Delta \rho g H_2} (\psi_2 - \psi_1) + \beta y \quad (10.32)$$

である。なお、(10.32)の右辺第2項は第3項に比べて非常に小さいので無視される場合も多い。それは、内部密度界面の変位の方が水面の変位に比べて十分に大きいからである。また、 $\psi_1$  もしくは  $\psi_2$  をゼロとして一方の方程式のみを扱う場合もある。それは、reduced gravity model とか、等価順圧モデル (equivalent barotropic model) とかと呼ばれる。例えば海洋なら、下層が分厚く、流れも上層に集中している。それ故にそのような扱いが可能になる。そのような単純化は大気の場合にも使われる。

なお、上の準地衡流渦度方程式以外にも、パラメーターの大きさの取り方により地衡流近似の下でのポテンシャル渦度方程式はいくつも可能である。実際、密度成層を考慮すると、海洋の惑星スケールの現象に対しては、定常状態では相対渦度の項はそう重要ではなく、発散効果がより重要となり、 $1/h$  を線形化できない場合いも出てくる。しかし、この準地衡流渦度方程式は、3つの効果、惑星  $\beta$ 、相対渦度、発散(渦柱の伸縮)の3つが入っており、力学を理解するためのモデル方程式としては非常によい。

問題 10.3.1: (10.29)-(10.32) を導出せよ。

問題 10.3.2: (10.23) から (10.26) を導出せよ。

問題 10.3.3: 海洋上層の厚さ  $H_2$  を 1000m、 $\Delta\rho/\rho_0 = 10^{-3}$  として、(10.32) の  $f_0^2/gH_2$  と  $\rho_0 f_0^2/\Delta\rho gH_2$  の比を求め、前者無視できることを示せ。また、下層の運動が上層の運動に対して無視できるとき、 $\sqrt{\Delta\rho gH_2/\rho_0}/f_0$  をロスビーの内部変形半径という。北緯 40 度でのロスビーの内部変形半径を計算せよ。

## 参考: 回転球面上でのポテンシャル渦度

4 章の章末の [参考] で、成層流体中のポテンシャル渦度の保存則を循環の保存から導出した。循環の保存は慣性系での法則である。地球上で見える場合、地球の自転角速度を  $\Omega$  とし、それに相対的な渦度を  $\omega_R$  とすると、 $\omega = 2\Omega + \omega_R$  なので、ポテンシャル渦度は

$$Q = \frac{1}{\rho}(2\Omega + \omega_R) \cdot \nabla\lambda \quad (10.33)$$

となる。非圧縮断熱の場合は  $\lambda$  として密度を取れば良く、圧縮性のある場合には温位を用いればよい。地球流体では密度は下ほど大きい。すなわち等密度面 (もしくは等温位面) はほぼ水平である。故に、 $\nabla\lambda = \hat{z}\partial\lambda/\partial z$  と近似できよう。そうすると

$$Q = \frac{1}{\rho} \left( f + \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \frac{\partial\lambda}{\partial z} \quad (10.34)$$

となる。 $\frac{1}{\rho} \frac{\partial\lambda}{\partial z}$  を  $\frac{1}{h}$  と思えば、これは (10.1) と同じである。

渦柱の伸縮がない  $\left( \frac{D}{Dt} \left[ \frac{\partial\lambda}{\partial z} \right] = 0 \right)$  とすると惑星渦度の鉛直成分と相対渦度の鉛直成分の和  $\left( f + \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)$  が保存することになる。流体の緯度の変化はポテンシャル渦度への惑星渦度の寄与を増減させ、その分だけ相対渦度が変化するという事である。

惑星渦度の寄与が緯度とともに増加することを循環の立場で考えると、閉曲線  $C$  で囲まれた領域の地球の自転軸に直交する面への射影が緯度とともに大きくなるために、その領域を通過する惑星渦度の総量が増加すると言い換えることができる。また、これは問題 7.4.3 で考えた軸回りに自由に回転する円板と話としては同じである。密度成層の存在は、運動を水平面内に限るようにする。すなわち流体の回転は鉛直軸回りに限られる。宇宙から見た場合、この鉛直軸回りの回転は緯度 (鉛直軸の向き) が変わってもその軸周りにトルクが与えられない限り変化しない。例えば、赤道上で静止していた流体は中緯度へ移動しても宇宙から見る限り、鉛直軸回りには回転しない。しかし、我々は、地球とともに

に回転しているので、我々から見ると  $-f/2$  で回転しているように見える。この回転は地表面に相対的な渦度なので、それによる流れは回りの流体の地理学的位置を変化させる。そして、次章で考えるように復元力として働き、ロスビー波と呼ばれる波を惹き起こす。

# Chapter 11

## ロスビー波

前節で導出した準地衡流渦度方程式は、中緯度のゆっくりとした流れを記述する。中緯度のゆっくりとした運動は、ほぼ地衡流平衡にあり、それはポテンシャル渦度の保存(ケルビンの循環定理)に従う。この方程式により、重要な波動であるロスビー波であるとか、海洋循環の構造であるとかが、比較的容易に解析できる。この章では波動を考える。大気や海洋に見られる現象の多くは波動論からアプローチ可能である。また、波動は、系に微小な擾乱が与えられた時、それがどのように系全体に影響を与えるかを表すものであり、その性質を知ることは、システムの理解にも有用である。

### 11.1 1層でのロスビー波

ここでは、最も簡単な場合として、1層の場合の波動解を見てみよう。1層の場合の準地衡流渦度方程式は、§10.1, 10.2の結果より、

$$\frac{\partial q'}{\partial t} + J(\psi, q') + J(\psi, \bar{Q}) = 0 \quad (11.1)$$

と書ける。ここで、

$$q' = \nabla^2 \psi - \frac{1}{R^2} \psi$$

は流れに伴うポテンシャル渦度であり、 $R = \sqrt{gH_0}/f_0$  は変形半径である。他方、 $\bar{Q}$  は静止状態でのポテンシャル渦度(の変化分)

$$\bar{Q} = \beta y + \frac{f_0}{H_0} \eta_b \left( \simeq H_0 \left[ \frac{f}{H} - \frac{f_0}{H_0} \right] \right)$$

である。流れに伴うポテンシャル渦度変化は小さいとして(11.1)の第2項を無視する。そうすると方程式は、

$$\frac{\partial q'}{\partial t} + J(\psi, \bar{Q}) = 0 \quad (11.2)$$



となる。この式はポテンシャル渦度の擾乱成分は基本場 (静止状態) でのポテンシャル渦度の移流によって生じることを意味する。

さて、問題を簡単にするために、 $\bar{Q}$  は  $y$  のみの関数であり、かつ、

$$\frac{d\bar{Q}}{dy} = \text{一定} = \hat{\beta}$$

とする。地形が存在しない場合には  $\hat{\beta} = \beta$  であり、 $f$  平面の場合には、 $\hat{\beta} = (f_0/H_0)\partial\eta_b/\partial y$  である。後者の場合を地形性  $\beta$  という。前者の場合には通常の  $\beta$  であるが、特に区別する必要がある場合には、惑星  $\beta$  という言い方をする。 $\hat{\beta} > 0$  は前者の場合には、 $y$  が北向であり、後者の場合には、 $f_0 > 0$  ならば  $y$  方向に地形が高くなる (層が薄くなる) ことを意味する。

この時、方程式 (11.2) は

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\{ \nabla_H^2 \psi - \frac{1}{R^2} \psi \right\} + \hat{\beta} \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \quad (11.3)$$

と書ける。これに平面波の解

$$\psi = A \exp\{i(kx + ly - \sigma t)\} \quad (11.4)$$

を代入すると

$$\sigma = -\frac{\hat{\beta}k}{k^2 + l^2 + \frac{1}{R^2}} \quad (11.5)$$

を得る。 $x$  方向の位相速度、 $c_x$  は

$$c_x = \frac{\sigma}{k} = -\frac{\hat{\beta}}{k^2 + l^2 + \frac{1}{R^2}} \quad (11.6)$$

であり、 $\hat{\beta} > 0$  なら、常に負。すなわち、ポテンシャル渦度が大きい方を右に見る方向に位相が進むことになる。 $d\bar{Q}/dy$  が惑星  $\beta$  であるならば、西向きであり、地形性  $\beta$  であるならば、 $f_0 > 0$  (北半球) のときには、層の薄い方を右に見る方向、 $f_0 < 0$  (南半球) のときには厚い方を右に見る方向である。このような波をロスビー波 (Rossby wave) と言い、特に、 $d\bar{Q}/dy$  が地形由来の場合には、地形性ロスビー波 (Topographic Rossby wave) という。なお、ロスビー波の位相速度は、波数に依存する。このような性質を持つ波を分散性波動という (§5.2.2 参照)。

ロスビー波の位相は何故にポテンシャル渦度が大きい方を右に見る方向にしか伝搬しないのか? 地形性ロスビー波を例に考えよう。例えば、初期に  $y = y_0$  にあった流体要素

が、何らかの理由で、次ページの図のように三角関数型に  $y$  方向へ移動したとしよう。そうすると、 $y > 0$  へ移動した流体要素に関しては、流体層の厚さが薄くなるため、その流体は負の相対渦度を持つことになる。負の相対渦度を持つ流体の周囲には高気圧性の循環が生じる。したがって、その左側では、 $v > 0$  の流れが、他方、右側では  $v < 0$  の流れが生じる。すなわち、左側の流体は浅い方へ運ばれ、右の流体は深い方へ運ばれる。浅い方に運ばれた左側の流体には負の相対渦度が生じる。この流体要素は、左側の最初に浅い方に変位した流体を深い方に下げ、左側の流体を浅い方へ持ち上げる。初期に深い方に移動した流体要素についても同様に考えられ、波の位相は至る所浅い方を右に見て進むことになる。 $d\bar{Q}/dy$  が惑星  $\beta$  の場合もまるっきり同じである。

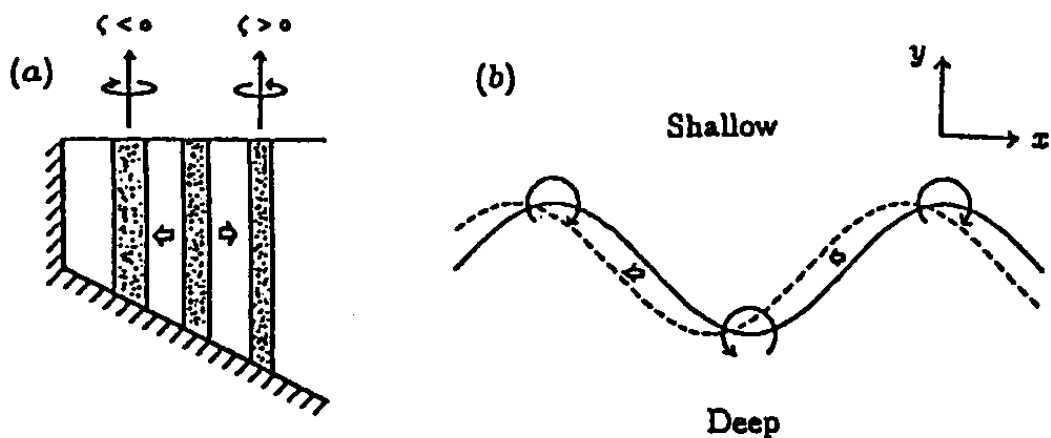


Fig.11.1: 地形性ロスビー波の位相速度の向きに関する説明

なお、ここで求めたロスビー波も、§8 で考えたのと同様に浅水系の波である。もし、§8 で、緩い底の傾斜を入れると、この波も入ってくる。その場合には、(底の傾斜が十分に緩ければ) 振動数  $\sigma$  の式 (8.15) に、( $\sigma$  の掛っていない) 項を一つ加えた形になる。すなわち、純粋な地衡流の代わりに地形性ロスビー波が入ってくるわけである。そして、周期が十分に長いという条件の下で、準地衡流方程式のものと同じ波が得られる。§8 で議論した波とロスビー波の大きな違いは、ロスビー波は重力波 (重力を復元力とする波) ではないということである。すなわち、この波は水面の変位を必要とはしない。(11.3) で第2項を無視すると、水面変位は生じない (蓋をしたのと同じ) が、それでもこの波は存在する。これは、上で説明したこの波の生じるメカニズムより当然である。

準地衡流近似の下では、重力波は filter out される。これは、現象の時間スケールが十分に長い (ほぼ地衡流平衡にある) と仮定したためである。準地衡流方程式の時間スケール

ルから見ると重力波速度は無限に速く、重力波による調節 (地衡流調節) は瞬時に行われることになる。これは、非圧縮の仮定の下では音波の速度が無限大になり、方程式から音波が除去されるのと同じである。

ロスビー波の位相速度は、常にポテンシャル渦度の大きな方を右に見る方向を向いているが、群速度はどうだろう。  $x$  方向の群速度は、

$$c_{gx} = \frac{\partial \sigma}{\partial k} = \frac{\hat{\beta}(k^2 - l^2 - R^{-2})}{(k^2 + l^2 + R^{-2})^2} \quad (11.7)$$

なる。したがって、エネルギーは  $k_0 = \sqrt{l^2 + R^{-2}}$  より  $k$  が小さければ ( $x$  方向の波長が長ければ) 位相速度と同じ方向に進み、  $k > k_0$  ならば、位相速度とは逆方向に進むことになる。すなわち、エネルギーは両方に進むことができる。これは、例えば、ある場所の流体が、  $\bar{Q}$  の大きな方向 ( $+y$  方向とする) へ動いた後、どのような運動が生じるかを考えれば分かりやすい。初期に  $+y$  方へ動いた流体の周りには、時計回りの流れが生じる。それ故、  $-x$  側の流体は  $+y$  方向へ流され、  $+x$  側の流体は  $-y$  方向へ流される。この流体の変位により、  $-x$  側には時計回りの循環が、そして、  $+x$  側には反時計回りの循環が生じる。位相は明らかに  $-x$  方向に進んでいる。しかし、運動は  $+x$  方向にも広がっていくことになる。

ちなみに、  $y$  方向の群速度は

$$c_{gy} = \frac{\partial \sigma}{\partial l} = \frac{2\hat{\beta}kl}{(k^2 + l^2 + R^{-2})^2} \quad (11.8)$$

であり、  $y$  方向の位相速度の向きとは逆になる。これは、5章参考2の内部重力波の鉛直伝播と事情は同じである。このロスビー波の群速度と位相速度の関係を図的に表現する方法として、章末の〈参考〉のような方法がある。

問題 11.1.1: 平面波、(11.4)、を考えたときの圧力と流速の分布はどうなるか?

問題 11.1.2: §5.2.2 の付録を用いて、(11.6) 式の分散関係式を考えたとき、短波長の波の波群は位相速度と逆方向に進むことを確認せよ。

問題 11.1.3:  $x$  方向には無限に延び、  $y$  方向には  $0 \leq y \leq L$  である水路を考える。  $\bar{Q}$  は  $y$  方向に増加し、  $d\bar{Q}/dy = \hat{\beta} = \text{一定}$ 、であるとする。そのような水路内でのロスビー波の解、分散関係と  $\psi$  分布を求めよ。また、  $\psi$  の分布を図示せよ。

問題 11.1.4: 問題 11.1.3 の水路内に一様な  $x$  方向の流れ、  $U$ 、があったとする。この一様流  $U$  の中で停滞する波の解を求めよ。さらに、その時の流線の分布を図示せよ。(  $U$  による移流の項は残す)。

問題 11.1.5: 問題 11.1.4 の問題を中緯度の偏西風帯の波に適用してみよう。  $L = 1000\text{km}$ ,  $f_0$  と  $\beta$  を北緯 45 度での値 ( $f_0 = 10^{-4}\text{s}^{-1}$ ,  $\beta = 1.6 \times 10^{-11}\text{s}^{-1}\text{m}^{-1}$ ) を用いたとき、波長 10,000km の波が停滞するときの風速は幾らか。

問題 11.1.6: ここまでは、準地衡流渦度方程式を線形化し、ロスビー波の解を求めたが、実際には、線形化せずとも (波の振幅が小さくなくとも)、ロスビー波は準地衡流渦度方程式の解である。そのことを示せ。ただし、この場合は、波数の異なる複数の波の重ね合せは一般には解にならない。それも示せ。

問題 11.1.7: 問題 11.1.3 の水路に、さらに孤立した山  $h_b(x, y)$  があつたとする。一様流がこの山にぶつかることによる流れの場の変化を求めたい。

$$fh_b(x, y)/H_0 = \begin{cases} h_0 \sin(\pi y/L) \cos k_0 x & \text{for } |x| \leq \pi/2k_0, \\ 0 & \text{for } |x| > \pi/2k_0, \end{cases}$$

とし、また、無限上流 ( $Ux \rightarrow -\infty$ ) では、流れは一様であり、下流でも解が無限大に発散することはないとする。  $U$  が正の場合、負の場合それぞれについて、定常解を求め、その結果について議論せよ。さらに実験を行い、比較せよ。

なお、問題 11.1.4 と同様に  $U$  の項のみを残し、非線形項を線形化してもよいが、もし可能なら、問題 10.1.1 の結果を用い、振幅が小さくない場合について解け (結果は同じになる)。

## 11.2 成層流体中のロスビー波

### 11.2.1 2層モデル

この授業では、成層の効果は参考程度にしか扱っていないが、前節で、成層流体に関する準地衡流方程式も導出したので、その中の波動についても簡単に見てみる。まず、2層の場合、(10.29)-(10.32)、を考える。底が平ら ( $\eta_b = 0$ ) であり、粘性も強制もなく ( $\delta_e = w_e = 0$ )、さらに、上層の渦位 (10.32) において、

$$\frac{f_0^2}{gH_2} \ll \frac{\rho_0 f_0^2}{\Delta\rho g H_2}$$

を仮定する。最後の仮定は内部の密度差が流体の密度に比べて十分大きいとすることであり、上面にも蓋をしている場合に対応する。海洋では、 $\Delta\rho/\rho = O(10^{-3})$  程度なので、良い近似となる。さらに、線形化すると (10.29), (10.30) は

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \nabla_H^2 \psi_1 - \frac{1}{R_1^2} (\psi_1 - \psi_2) \right] + \beta \frac{\partial \psi_1}{\partial x} = 0 \quad (11.9)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \nabla_H^2 \psi_2 - \frac{1}{R_2^2} (\psi_2 - \psi_1) \right] + \beta \frac{\partial \psi_2}{\partial x} = 0 \quad (11.10)$$

となる。ここで、

$$R_1 = \sqrt{\frac{\Delta\rho g H_1}{\rho_0 f_0^2}}, \quad R_2 = \sqrt{\frac{\Delta\rho g H_2}{\rho_0 f_0^2}} \quad (11.11)$$

である。これらは連立方程式なので、波動解を考える場合、振動数と波数は下層も上層も等しい。しかし、圧力  $\psi_j$  の大きさや符号は上層と下層で違う可能性がある。そこで、

$$\psi_1 = A_1 e^{i(kx+ly-\sigma t)}, \quad \psi_2 = A_2 e^{i(kx+ly-\sigma t)} \quad (11.12)$$

と置く。これらを (11.9), (11.10) に代入すると、

$$\left\{ \sigma \left[ (k^2 + l^2) + \frac{1}{R_1^2} \right] + k\beta \right\} A_1 - \frac{\sigma}{R_1^2} A_2 = 0 \quad (11.13)$$

$$-\frac{\sigma}{R_2^2} A_1 + \left\{ \sigma \left[ (k^2 + l^2) + \frac{1}{R_2^2} \right] + k\beta \right\} A_2 = 0 \quad (11.14)$$

を得る。この式が有意な解 ( $A_1 = A_2 = 0$  でない解) を持つためには、

$$\begin{vmatrix} \sigma \left[ (k^2 + l^2) + \frac{1}{R_1^2} \right] + k\beta & -\frac{\sigma}{R_1^2} \\ -\frac{\sigma}{R_2^2} & \sigma \left[ (k^2 + l^2) + \frac{1}{R_2^2} \right] + k\beta \end{vmatrix} = 0 \quad (11.15)$$

なので、これより、 $\sigma$  と  $k, l$  の関係 (分散関係) が求まる。上の式は  $\sigma$  の 2 次方程式なので、 $\sigma$  は 2 つ求まり、

$$\sigma_J = -\frac{\beta k}{k^2 + l^2}, \quad \sigma_K = -\frac{\beta k}{k^2 + l^2 + R_I^{-2}} \quad (11.16)$$

となる。ここで、

$$R_I = \frac{R_1 R_2}{\sqrt{R_1^2 + R_2^2}} = \frac{1}{f_0} \sqrt{\frac{\Delta\rho g H_1 H_2}{\rho_0 (H_1 + H_2)}}$$

である。 $\sigma_J$  は 1 層の場合の分散関係式 (11.5) の  $R$  を無限大としたものに等しい。ここでは、 $f_0^2/gH_1 \ll \rho_0 f_0^2/\Delta\rho g H_1$  を仮定し、前者と  $\psi_1$  の積の項を無視したが、これは、 $\sqrt{gH_1}/f_0$  が無限大の極限を考えていることに対応するので、この分散関係は 1 層の場合を同じとすることができる。他方、 $\sigma_K$  は (11.5) の  $R$  を  $R_I$  で置き換えたものになっている。この  $R_I$  は内部の密度面の変位による項であり、内部変形半径と呼ばれる。変形半径は重力波速度をコリオリ振動数で割ったものであるが、 $\sqrt{\frac{\Delta\rho g H_1 H_2}{\rho_0 (H_1 + H_2)}}$  は 2 層流体における重力波 (内部重力波) 速度であり、これも、重力波速度割るコリオリ振動数である。

それぞれの波の鉛直構造 ( $A_1$  と  $A_2$  の関係) を求めるには (11.16) を (11.14) に代入すれば良く、

$$A_1 = A_2 \quad \text{for } \sigma = \sigma_J \quad (11.17)$$

$$A_1 = -\frac{R_2^2}{R_1^2} A_2 = -\frac{H_2}{H_1} A_2 \quad \text{for } \sigma = \sigma_K \quad (11.18)$$

となる。 $\sigma_J$ の波は上層と下層の運動が同じである。それ故、密度界面の変位は生じず、内部変形半径の影響がでないことが分かる。そのような構造を順圧的 (barotropic) と言い、この波は順圧ロスビー波 (Barotropic Rossby wave) と呼ばれる。他方、 $\sigma_K$ の波は、下層と上層で逆向きに流れが生じる。さらに、 $H_1A_1 + H_2A_2 = 0$ なので、鉛直積分した流れはゼロになる。上層と下層の圧力場が逆符合 (上層が高気圧なら下層は低気圧) なので密度界面は大きく変位する。この構造を傾圧的 (baroclinic) と言い、この波は傾圧ロスビー波 (baroclinic Rossby wave) と呼ばれる。

$\psi_J = \frac{1}{H_1 + H_2}(H_1\psi_1 + H_2\psi_2)$ ,  $\psi_K = \psi_1 - \psi_2$  とし、(11.9), (11.10) を書き直すと、

$$\frac{\partial}{\partial t}[\nabla_H^2\psi_J] + \beta\frac{\partial\psi_J}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t}\left[\nabla_H^2\psi_K - \frac{1}{R_I^2}\psi_K\right] + \beta\frac{\partial\psi_K}{\partial x} = 0$$

と、独立な2つの方程式に分離される。ここで、 $\psi_J$ は順圧モードを  $\psi_K$ は傾圧モードを表す。すなわち、1層モデルの式(11.3)は変形半径さえ与えられれば、どのようなモードにも適用可能という事になる。

### 11.2.2 連続成層モデル

連続成層の場合、(10.26)より、線形化された方程式は、

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\nabla_H^2\psi + \frac{\partial}{\partial z}\left\{\frac{f_0^2}{N^2}\frac{\partial\psi}{\partial z}\right\}\right] + \beta\frac{\partial\psi}{\partial x} = 0 \quad (11.19)$$

となる。内部重力波 (§5の参考)と同様に、もし、浮力振動数  $N$  が空間的に一定であるなら、(そして、流体が無限に広がっているならば)

$$\psi = Ae^{i(kx+ly+mz-\sigma t)}$$

の形の平面波解を持ち、これを(11.19)に代入すれば、分散関係

$$\sigma = -\frac{\beta k}{k^2 + l^2 + f_0^2 N^{-2} m^2} \quad (11.20)$$

を得る。鉛直方向の群速度は、 $\sigma$ を  $m$ で微分し、

$$c_{gz} = \frac{\partial\sigma}{\partial m} = \frac{2\beta k f_0^2 N^{-2} km}{(k^2 + l^2 + f_0^2 N^{-2} m^2)^2}$$

となる。エネルギーが上向きの際は  $km > 0$ 、すなわち、波面 (等位相面) は西から東に下る形になる。水平方向の位相速度は西向きなので、鉛直位相速度は下向である。これは、内部重力波の場合と同様の理由による (§5 参考参照)。

他方、2層モデルで扱ったように、流体層の厚さが有限(厚さを  $H$  とする)で上面と下面で鉛直流速ゼロであるならば、境界条件は(10.28)を線形化することにより、 $\partial\psi/\partial z = 0$  となるので、

$$\psi = a_n \cos \frac{n\pi z}{H} e^{i(kx+ly-\sigma_n t)} \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

の形の解を持ち、分散関係は

$$\sigma_n = -\frac{\beta k}{k^2 + l^2 + (n\pi f_0)^2 (NH)^{-2}}$$

となる。 $n = 0$  が順圧モードで、 $n \geq 1$  が第  $n$  傾圧モードである。第  $n$  傾圧モードの変形半径は  $\frac{NH}{n\pi f_0}$  であることが分かる。これは内部重力波速度を  $f_0$  で割ったものになっている (§5 の参考参照)。

問題 11.2.1: (11.16) を導出せよ。さらに、(11.17)、(11.18) を確認せよ。

問題 11.2.2: 海洋では上層に密度躍層があり、2層モデルで近似する場合、上層の厚さ、1000m、下層の厚さ 4000m、 $\Delta\rho/\rho_0 = 10^{-2}$  とかの値が良く用いられる。北緯 45 度での内部変形半径は幾らか。また、内部変形半径よりも波長が十分に大きいときの傾圧ロスビー波の速度は幾らか。

### 参考: ロスビー波の分散関係の図的表現

振動数  $\sigma$  が与えられていたとする。分散関係式より、

$$\left(k + \frac{\hat{\beta}}{2\sigma}\right)^2 + l^2 = \frac{\hat{\beta}^2}{4\sigma^2} - R^{-2}$$

が得られる。これは、振動数  $\sigma$  の波の波数ベクトルの終点が  $(-\hat{\beta}/2\sigma, 0)$  を中心とする半径  $\sqrt{\hat{\beta}^2/4\sigma^2 - R^{-2}}$  の円上に来ることを意味する。 $(\sigma > 0$  なら  $k < 0$  であり、波数ベクトルの方向が位相速度の方向になる)。他方、群速度は、(11.7), (11.8) より、

$$\mathbf{c}_g = \frac{-2\sigma}{k^2 + l^2 + R^{-2}} \left(k + \frac{\hat{\beta}}{2\sigma}, l\right)$$

と書ける。 $(k + \hat{\beta}/2\sigma, l)$  は円の中心  $(-\hat{\beta}/2\sigma, 0)$  から、円周上の点  $(k, l)$  へのベクトルである。 $\sigma > 0$  とすれば、群速度の方向は、波数ベクトルに対応する円上の点から円の中心向きであることが分かる。

問題 11.A.1: 上のことを実際に図に書いて確認せよ。

# Chapter 12

## 西方強化 (海洋の循環)

回転系のゆっくりとした変動は、ほぼ地衡流平衡した流れになる。ほぼ地衡流平衡した流れは、ポテンシャル渦度方程式に支配される。すなわち相対渦度場は、渦柱の伸縮と、 $f$  の空間分布によって変化する。そのことによって引き起こされる典型的な運動の例として、前節ではロスビー波を見た。ロスビー波の位相は必ず西へ進む。エネルギーは短波長の場合には東へ進むが、長波長の場合にはやはり西向きである。この伝播特性の東西の非対称性は、東西に固体境界 (岸) があるような世界では、強制を受けたときの定常解にも、顕著な非対称性を産み出す。その典型例が海洋循環であり、そのような非対称性を作る機構を西方強化 (もしくは、西岸強化) という。

### 12.1 Stommel の解

準地衡流渦度方程式 (10.15)、(10.18) を用いる。ただし、定常を仮定し、非線形項、並びに底の地形  $\eta_b$  は無視する。方程式は

$$\beta \frac{\partial \psi}{\partial x} = -r \nabla_H^2 \psi + \frac{f_0}{H_0} w_e \quad (12.1)$$

となる。ここで、 $w_e$  は、海面が風によってこすられることによるエクマンポンピング速度であるが、それは、海面風応力を  $\tau = (\tau^{(x)}, \tau^{(y)})$  としたとき、

$$w_e = \frac{1}{\rho_0 f_0} \text{curl}_z \tau = \frac{1}{\rho_0 f_0} \left[ \frac{\partial \tau^{(y)}}{\partial x} - \frac{\partial \tau^{(x)}}{\partial y} \right]$$

と表せる (問題 9.2.1)。なお、 $\text{curl}_z$  は rotation の  $z$  成分という意味 ( $\text{curl}_z \tau = \hat{z} \cdot (\nabla \times \tau)$ )。

南北の長さが、 $L_y$ 、東西、 $L_x$ 、の矩形の海を考える。 $x = 0, x = L_x, y = 0, y = -L_y$  に岸があるとする。岸に直交する流速がゼロという条件は、岸に沿って流線関数の値が一定ということである。この一定値は何でも構わないので、ここではゼロとする。そうする



と、境界条件は、 $x = 0, x = L_x, y = 0, y = -L_y$  で  $\psi = \text{一定}$ 、ということになる。簡単のために、

$$\tau^{(x)} = \tau_0 \cos \frac{\pi y}{L_y}, \quad \tau^{(y)} = 0 \quad (12.2)$$

という風を考える (以下では、 $\tau_0 > 0$  の場合を考えるが、負の場合は循環の向きが逆になるだけで、結果はまるっきり同じである)。このとき、

$$\text{curl}_z \boldsymbol{\tau} = \frac{\pi}{L_y} \tau_0 \sin \frac{\pi y}{L_y} \quad (12.3)$$

なので

$$\psi(x, y) = \phi(x) \sin \frac{\pi y}{L_y} \quad (12.4)$$

は、(12.1) の解であり、かつ、 $y = 0, y = -L_y$  での境界条件を満足している。 $\phi(x)$  に関する方程式は

$$r \frac{d^2 \phi}{dx^2} + \beta \frac{d\phi}{dx} - r \left( \frac{\pi}{L_y} \right)^2 \phi = \frac{\pi}{\rho_0 L_y H} \tau_0 \quad (12.5)$$

となる。境界条件は  $x = 0, x = L_x$  で  $\phi = 0$ 。解は、

$$\phi(x) = -\frac{\tau_0 L_y}{r \pi \rho_0 H} \left\{ 1 - \frac{e^{-\alpha_1 x}}{e^{\alpha_2 L_x} - e^{-\alpha_2 L_x}} \left[ (e^{\alpha_2 L_x} - e^{\alpha_1 L_x}) e^{-\alpha_2 x} - (e^{-\alpha_2 L_x} - e^{\alpha_1 L_x}) e^{\alpha_2 x} \right] \right\} \quad (12.6)$$

ここで、

$$\alpha_1 = \frac{\beta}{2r}, \quad \alpha_2 = \sqrt{\alpha_1^2 + \left( \frac{\pi}{L_y} \right)^2} \quad (12.7)$$

である。

$\beta = 0$  とした場合には、(12.6) 式は

$$\phi(x) = -\frac{\tau_0 L_y}{r \pi \rho_0 H} \left\{ 1 - \frac{\cosh \frac{\pi}{L_y} \left( \frac{1}{2} L_x - x \right)}{\cosh \frac{\pi}{2L_y} L_x} \right\} \quad (12.8)$$

となる。この場合には解は東西対称となる。この解を図 12.1(a) に示す。この場合には、風によって海洋に渦度が注入され、その渦度によって海洋循環が起き、その海洋循環の持つ渦度が、底摩擦によって失われるという形になっている。 $w_e$  を使って説明すると、上層エクマン層内で、北半分では西風による南下流が、南半分では、東風による北上流ができ、エクマン層内では収束が起き、 $w_e$  は負になる。そして、それによって渦柱が縮められ、高気圧性の循環ができる。その高気圧性の循環故に、底のエクマン層では、発散が起き、下向の鉛直流を生じ、平衡状態に達する、ということになる。底が傾斜していない回転水槽で水を抜いた場合の定常循環と同じである。

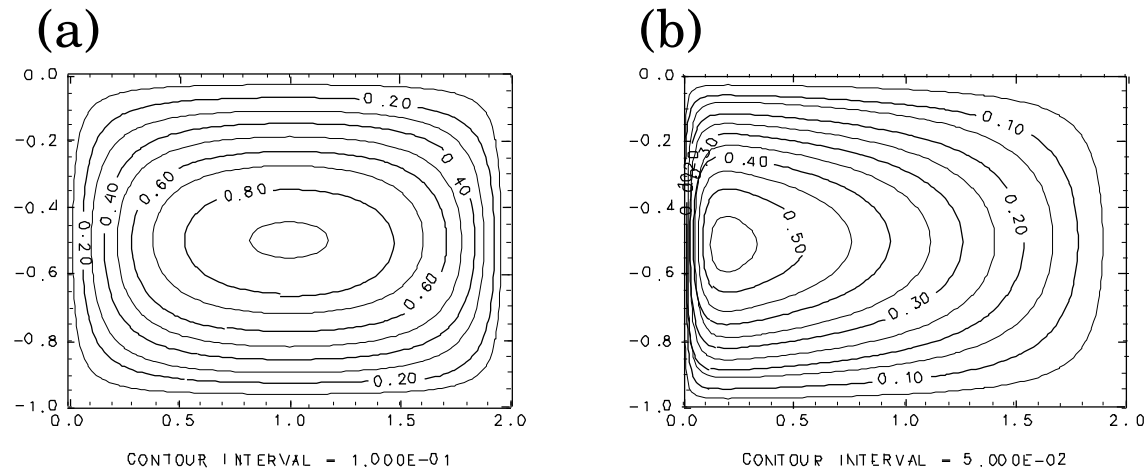


Fig.12.1: 海洋の風成循環における流線関数分布。(a)  $\beta = 0$  [(12.8) の  $\phi$  を (12.4) に代入したもの]。(b)  $\beta L_x / r = 20$  [(12.6) の  $\phi$  を (12.4) に代入したもの]。

現実の海洋では、 $\beta$  効果は極めて重要である。 $\beta \neq 0$  の時の解を図 12.1(b) に示す。この場合には、循環の中心は西へ大きくずれることになる。この流れのパターンは Gulf Stream や Kuroshio のような強い海流が海洋の西に現れることを説明するものである。このように、西岸に強い流れが起きることを西方強化 (もしくは、西岸強化)、そして、その強い流れを西岸境界流という。この底摩擦による西岸境界流の解は Stommel(1948) によって見出され、Stommel の解と呼ばれる。

問題 12.1.1: 上の話では閉じた海を考えたが、もし東西に境界がなく、南極周極流のように、一回りしているとしたら、どうなるか?

## 12.2 Sverdrup 流と西岸境界流

$\beta \neq 0$  の場合には何故循環中心は西に寄り、西岸に沿って強い流れができるのか? (12.6) は複雑すぎてこの辺りの事情はよく判らない。また、現実の海洋では散逸は十分に小さいと考えられる。そこで、 $\beta / r \gg \pi / L_y$  という条件を (12.6) 式に課してみよう。このとき、 $L_x / L_y = O(1)$  なので、 $\alpha_1 L_x \gg 1$  である。そうすると、解は

$$\phi(x) = \frac{\pi \tau_0}{\beta \rho_0 L_y H} [(x - L_x) + L_x e^{-2\alpha_1 x}] \quad (12.9)$$

となる。したがって、

$$\psi(x, y) = \frac{\pi \tau_0}{\beta \rho_0 L_y H} [(x - L_x) + L_x e^{-2\alpha_1 x}] \sin \frac{\pi y}{L_y} \quad (12.10)$$

となる。流速の南北成分は、

$$v(x, y) = \frac{\pi\tau_0}{\beta\rho_0L_yH} [1 - 2\alpha_1L_x e^{-2\alpha_1x}] \sin \frac{\pi y}{L_y} \quad (12.11)$$

となり、北上流は

$$\delta_S = \frac{1}{2\alpha_1} = \frac{r}{\beta} \quad (12.12)$$

の幅を持つ狭い領域だけで起きることが分かる。そして、 $x \gg \delta_S$  より東では、 $x$  に依存しない南下流

$$v_s(x, y) = \frac{\pi\tau_0}{\beta\rho_0L_yH} \sin \frac{\pi y}{L_y} \quad (12.13)$$

が生じることになる。

### 12.2.1 スベルドラップ平衡

上で求めた  $v_s$  は実は、(12.1) 式で、底のエクマン摩擦の影響を無視したものの解になっている。すなわち、

$$\beta \frac{\partial \psi_s}{\partial x} = \frac{f_0}{H_0} w_e \quad (12.14)$$

である。これはどういうことを意味するのかというと、風による上層エクマン層からの  $w_e$  があるために ( $w_e < 0$  なら) 渦柱が縮む、その縮んだ部分だけ、 $f$  を小さくするように南に行くということである。そのように流体が運動すれば、相対渦度を生じることなく、内部領域におけるポテンシャル渦度を保存できる。この式は Sverdrup の式と呼ばれ、鉛直積分した流量に対しては、密度成層があるような場合も含め、広く一般に成り立つ。また、この関係式が成り立つ領域を Sverdrup 内部領域などと呼ぶ。

粘性が小さいとして得た解、(12.10)、は、西岸近くを除くと、(12.14) で、 $\psi_s$  が東岸での境界条件を満足するとして解いたものに等しい。これをスベルドラップの解という。なお、このスベルドラップの関係は粘性が小さければ海洋のほとんどの領域で成り立つ。しかし粘性が無ければ系は閉じず、粘性が重要となる狭い領域が出来る。これは、地衡流場とエクマン層の関係と良く似ているが、このようにして生じる薄い(狭い)層は境界層と呼ばれる。

### 12.2.2 西岸境界流

西岸境界流の部分は、 $r/\beta$  ゼロの極限で考えれば、forcing を除いた方程式

$$\beta \frac{\partial \psi_w}{\partial x} = -r \nabla_H^2 \psi_w \quad (12.15)$$

を西岸で、 $\psi_w = 0$ ,  $\beta x/r \rightarrow \infty$  で  $\psi_w \rightarrow \psi_s(0, y)$  という条件の下に解いたものに等しい。すなわち、

$$\psi_w = \psi_s(0, y) \left(1 - e^{-\frac{\beta}{r}x}\right) \quad (12.16)$$

方程式 (12.15) は、北へ行くにしたがって ( $f$  が大きくなり)、負の相対渦度が生じるが、この渦度が狭い境界層の中で散逸することを意味する。スベルドラップ領域では散逸が生じないので、ここで、散逸する渦度は外力として加えられた渦度の総量と同じである。なお、北へ行く流れは必ず負の相対渦度を、南へ行く流れは必ず正の相対渦度を持つため、内部領域の弱い流れと接続するという接続条件より、このような境界流は西岸にしかできないことが判る。

この西岸境界流はスベルドラップ領域で、南に行った水が北へ戻るために生じたが、方程式 (12.16) より明らかなように、外力が与えられないとき、 $\beta$  平面上で、水が南北に移動する場合には必ず西岸近くの境界流という形を取るようになる。

なお、ここでは、エクマン層による散逸と  $f$  の移流 ( $\beta v$ ) が釣り合うとしているが、現実には、流れが強いために非線形性や、また、深いところの流れが弱ければ水平渦粘性と釣り合う場合もある。水平渦粘性と釣り合う場合の解を Munk の解という。

西岸に強い流れができることの説明としては、以下のようなものもある。

(a)  $f$  平面で考えると、 $w_e < 0$  ( $w_e > 0$ ) の場合には、循環は負の相対渦度を持つ時計回り (正の相対渦度を持つ反時計回り) のものになる。これに  $\beta$  効果が加わると、循環の東半分では、流れが南向き (北向き) なので、負の相対渦度 (正の相対渦度) が弱められる。他方、西半分では逆に強められる。相対渦度の強い領域の方が流速が大きくなるため、南下流と北上流の流量が一致するためには、南下流と北上流の境は西へずれなければならない。 $\beta$  効果が散逸に比べて十分に大きな極限では、この境は西岸近くまで移動する。

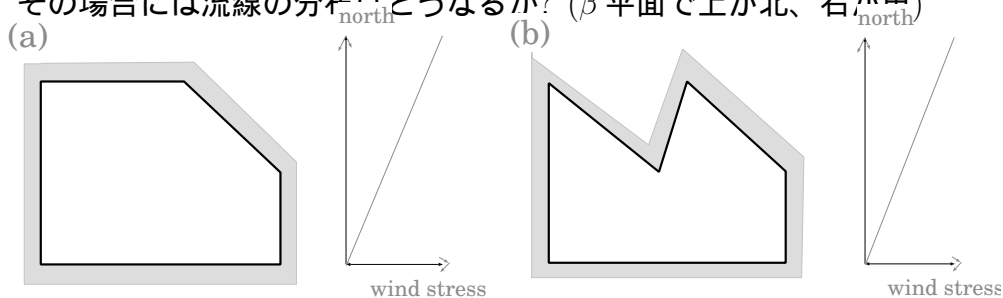
(b) 海面応力により海洋に渦度が注入されれば、ロスビー波が発生する。ロスビー波の位相速度は西向きであり、情報は西へしか伝わらない。すなわち、東岸境界の条件は海洋内部に入れるが、海洋内部の流体は西岸の境界条件を知らないことになる。それ故、流体は西岸近くまで来て、初めて西岸の存在を知り、西岸近くの狭い領域で西岸境界条件を満足すべく急激に変化する。その結果が西岸境界流である。

(エネルギー的には、海面応力で励起された長波長のロスビー波のエネルギーは短波長のロスビー波によって反射することが可能なはずである。しかし、短波長のロスビー波の相対渦度は非常に大きく、それ故、少しでも粘性があれば、エネルギーは急速に減衰する。したがって、エネルギー並びに相対渦度の散逸は西岸近傍のみで

生じる。実際、定常な海面応力は東西波長が無限に長いロスビー波を励起するので、それに対応する反射波の波長は無限小になり、反射波は必ず減衰するということがある)。

問題 12.2.1: 底面を一様に傾けた円筒型の水槽 (sliced cylinder) を考える。この水槽に水を入れ、を回転台に載せ、回転させる。水槽側面下部から水を少しずつ抜いた時の、スベルドラップ流線を求めよ。水を抜くことの影響は、水面の一様な下降のみに現れるとする。可能であれば、実際に実験を行い、水槽内の流れと比較し、また、違いがあればそれについて論ぜよ。

問題 12.2.2: 下図のような形の陸地で囲まれた海洋上を下図右のような北ほど強い東西一様な東風が吹いているとする。その時のスベルドラップ流線の分布を描け。さらに、スベルドラップ平衡を満足しない境界近くには境界層が出来ると仮定しよう。その場合には流線の分布はどのようなか? ( $\beta$  平面で上が北、右が東)

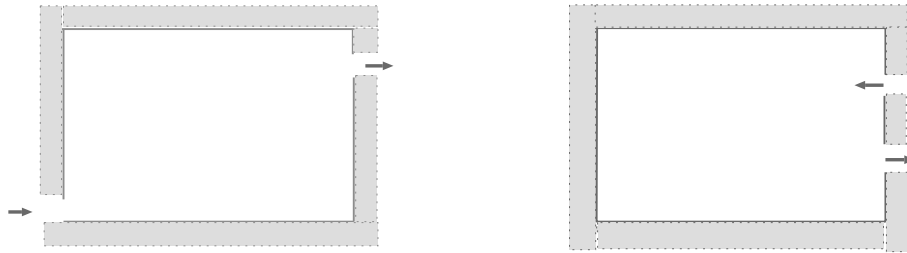


### 12.3 海洋循環のまとめ: 渦度方程式の項の釣り合い

$\beta$  平面上の南北流は、絶対渦度の保存により、必ず相対渦度を生成しようとする。この南北流に伴う相対渦度の生成とつり合うものは、今考えている線形の場合では、時間変動項、強制項、もしくは、散逸項である。強制や散逸がない場合、例えば北向きの流れがあると、負の渦度が生成されるため、北上流の中央より西では北向きの流れが、東では、北向きの流れを弱めるような南向きの流れが作られる。それ故、北向きの流れは西に移動する。最初に南向きの流れを考えても同様である。これは、前章で扱ったロスビー波に他ならない。次に、強制がある場合、それとつり合う南北流はスベルドラップ流である。正の渦度の注入があればそれとつり合う (逆符号の渦度を生成しそれを打ち消す) 北向きの流れが出来る。スベルドラップ流の補償

流は強制と同符号の渦度を生成するので、粘性と時間変動項以外つり合えるものがない。海の真ん中では粘性はたいして効かないので、結局、ロスビー波として、南北流は必ず西に行き、西岸にぶつかり、そこで粘性の影響を受けることになる。

問題 12.3.1: 日本海のような縁海では、しばしば、海流は一つの海峡から入り他の海峡から抜けていくという流出入によって駆動される。下図のような流入流出がある場合<sup>(a)</sup>を考える。流れの道筋の概略を図示せよ。<sup>(b)</sup> ( $\beta$  平面で上が北)



問題 12.3.2: 日本海を考えた場合、朝鮮半島にそう西岸境界流も存在するが、日本沿岸に沿う流れも存在する。何故か、考えよ。