基礎物理学 I (2006 年 6 月 23 日配布)
(担当 久保川厚 ：e-mail kubok@ees.hokudai.ac.jp)

復習プリント 1 運動の表し方

以下は物体の運動の表し方に関して、これだけは理解しておいて欲しいと思う事柄である。以下を読んで、理解し、**最後の問題 (問題 1.1) を解き、来週 (6/30) 提出のこと**。なお、質問等があれば、レポートの最後に書いてください。

1. 物体の位置はベクトルで表現される。これを位置ベクトルという:
位置は、ある基準点 (原点) を定め、その原点からの距離と方向で定義される。時刻 t での位置を $\boldsymbol{r}(t)$ と書くことにする。ベクトルはこのプリントのような**太字**にするか、$\vec{r}$ というふうに矢印をつけるかして、大きさだけを持ち、方向を持たない (質量のような) スカラー量と区別する。
x, y, z 座標の座標軸の方向を表す単位ベクトル (基本ベクトル) を $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ とする。そうすると、$\boldsymbol{r}$ は

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$$

と表記することができる。この点は、x 軸に沿って、原点から、距離 x 進み、次に、y 軸に平行に y 進み、最後に z 軸に平行に z 進んで到達する場所を表す。

2. 速度は方向と大きさ (速さ) をもつベクトルである:
時刻 t での物体の位置を $\boldsymbol{r}(t)$、Δt 後の位置を $\boldsymbol{r}(t+\Delta t)$ と書く。この時、物体は、Δt 時間で、ベクトル $\boldsymbol{r}(t+\Delta t) - \boldsymbol{r}(t)$ で表現される距離と方向に進んだことになる。したがって、その間の平均の速度は

$$\overline{\boldsymbol{v}} = \frac{\boldsymbol{r}(t+\Delta t) - \boldsymbol{r}(t)}{\Delta t}$$

となる。時刻 t での速度は、$\Delta t \to 0$ の極限を取り、

$$\boldsymbol{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\boldsymbol{r}(t+\Delta t) - \boldsymbol{r}(t)}{\Delta t} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$$

と微分で表される。また、速度の x, y, z 成分は、それぞれ、

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt},$$

とそれぞれの座標の微分で表現される。

3. 加速度は方向と大きさをもつベクトルである:
速度ベクトルの時間変化率を加速度という。

$$\boldsymbol{a} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt}$$

方向だけが変わるときにも加速度はある。成分で書けば

$$\boldsymbol{a} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k} = \frac{dv_x}{dt}\boldsymbol{i} + \frac{dv_y}{dt}\boldsymbol{j} + \frac{dv_z}{dt}\boldsymbol{k}$$

で、速度のどの成分が変化しても加速度があることになる。

4. 速度が時間の関数として与えられている時、速度から位置を求めるには、速度を時間で積分をすれば良い:
速度が時間の関数として与えられている場合には、もし、時刻 t_A での位置 $\boldsymbol{r}(t_A)$ が既知であれば、任意の時刻 t での位置は

$$\int_{t_A}^{t} \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} dt = \int_{t_A}^{t} \boldsymbol{v}(t) dt$$

より求められる。左辺は、$\boldsymbol{r}(t) - \boldsymbol{r}(t_A)$ なので、

$$\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{r}(t_A) + \int_{t_A}^{t} \boldsymbol{v}(t) dt$$

である。積分は、成分毎に行えば良い。すなわち、

$$\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{r}(t_A) + \boldsymbol{i} \int_{t_A}^{t} v_x(t) dt + \boldsymbol{j} \int_{t_A}^{t} v_y(t) dt + \boldsymbol{k} \int_{t_A}^{t} v_x(t) dt$$

加速度から速度を出す方法も同じである。

参考: 速度が座標の関数の時: 速度が座標の関数の時には、微分方程式を解くという作業を行わなければならない。例えば、1 次元の問題で、x 方向の速度が

$$v = ax$$

で、時刻ゼロでの座標が $x = x_0$ という場合を考える。この場合、両辺を時間で積分しようとしても右辺の x の時間依存性が分からないので、右辺の積分はできない。このような 1 階の微分方程式の場合には、$v = dx/dt$ なので、両辺を x で割り、$\dfrac{1}{x} dx = a$ と置き換えて、両辺を t で積分すればよい。すなわち、

$$\int_0^t \frac{1}{x} \frac{dx}{dt}\, dt = \int_{x_0}^{x(t)} \frac{1}{x} dx = \int_0^t a\, dt$$

で、左辺は $[\log_e x]_{x=x_0}^{x=x(t)}$、右辺は at なので、解は、

$$x(t) = x_0 e^{at}$$

となる。

問題 1.1: ある物体の時刻 t での速度が

$$\boldsymbol{v}(t) = -\boldsymbol{i} a\, \sin bt + \boldsymbol{j} a\, \cos bt$$

で、時刻 0 での物体の位置が

$$\boldsymbol{r}(0) = \frac{a}{b} \boldsymbol{i}$$

であった。ここで、a, b は正の定数であるとする。

1. 速度ベクトルは時間とともにどのように変化するか。横軸を速度の x 成分、縦軸を速度の y 成分とし、$t = 0, t = \pi/(4b), t = \pi/(2b), t = 3\pi/(4b), t = \pi/b$ の場合を矢印で図示せよ。
2. 加速度を求めよ。
3. 任意の時刻 t での物体の位置を求めよ。
4. 物体の軌跡を図示せよ。さらに、その上に加速度の方向を書き入れよ。
5. 速度が

$$\boldsymbol{v}(t) = -\boldsymbol{i} a\, \sin bt + \boldsymbol{j} 2a\, \cos bt$$

の場合はどうなるか。物体の軌跡を図示し、さらに、その上に加速度の方向を書き入れよ。

基礎物理学 I (2006 年 6 月 30 日配布)
(担当 久保川厚 ：e-mail kubok@ees.hokudai.ac.jp)

復習プリント 2 運動の法則

以下は物体の運動の法則に関して、これだけは理解しておいて欲しいと思う事柄である。以下を読んで、理解し、**最後の問題 (問題 2.1 と問題 2.2) を解き、来週 (7/7) 提出のこと**。なお、質問等があれば、レポートの最後に書いてください。

1. 物体の加速度と質量の積は力により与えられる:
運動方程式は

$$m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \boldsymbol{F} \tag{1}$$

である。力 $\boldsymbol{F}$ が分かれば、加速度は求まり、初期の速度や位置が分かれば、前回の復習プリント 1 に従って、任意の時刻での物体の位置と速度が分かることになる。加速度も力も大きさと方向を持つベクトルである。

$\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$ を運動量という。$\boldsymbol{p}$ を用いると (1) は

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = \boldsymbol{F} \tag{2}$$

となる。力が働いていなければ運動量は保存する (時間的に不変)。また、運動量の時間変化は力による。

2. 力には、時空間的に一定のもの、速度に比例するもの、変位に比例するもの等、いろいろある:

地表面近くでの重力：加速度一定 $-mg$,　バネ：変位に比例 $-kx$,
空気中の小さな物体に働く抵抗：速度に比例 $-k\boldsymbol{v}$,　万有引力：距離の 2 乗に反比例：$-\dfrac{GMm}{r^2}\dfrac{\boldsymbol{r}}{r}$

また、机に置いた物体には重力と釣り合う机からの垂直抗力が働いており、紐に物体をつけて回転させた場合には、紐の張力により、物体は向心力を受けている。空気中の風船や水中の木片は、密度差に比例する浮力を受ける。

3. 作用反作用の法則と全運動量の保存

- 「物体 1 が物体 2 に作用をおよぼすとき、物体 2 は必ず物体 1 に反作用をおよぼす。作用と反作用は互いに大きさが等しく、向きは反対である」

- 物体 1 が物体 2 におよぼす力を $\boldsymbol{F}_{21}$, 物体 2 が物体 1 におよぼす力を $\boldsymbol{F}_{12}$ とする。このように、考えている物体間での力を内力という。それ以外の外から与えられる力を外力という。方程式は

$$\frac{d\boldsymbol{p}_1}{dt} = \boldsymbol{F}_{12}, \qquad \frac{d\boldsymbol{p}_2}{dt} = \boldsymbol{F}_{21},$$

  である。作用反作用の法則より、$\boldsymbol{F}_{21} = -\boldsymbol{F}_{12}$ なので、両者の和をとると

$$\frac{d}{dt}\left[\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2\right] = 0,$$

  となる。すなわち、内力の下では、トータルの運動量は時間的に変化しない (保存する)。方向含むベクトル量の保存則である。

- 内力以外にそれぞれに与えられる外力 $\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2$ を考える。

$$\frac{d\boldsymbol{p}_1}{dt} = \boldsymbol{F}_{12} + \boldsymbol{F}_1, \qquad \frac{d\boldsymbol{p}_2}{dt} = \boldsymbol{F}_{21} + \boldsymbol{F}_2.$$

両式を足すと

$$\frac{d}{dt}\left[\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2\right] = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2,$$

左辺の運動量の和は $\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2 = m_1\boldsymbol{v}_1 + m_2\boldsymbol{v}_2 = m_1 d\boldsymbol{r}_1/dt + m_2 d\boldsymbol{r}_2/dt$ となるので、

$$\boldsymbol{r}_G = \frac{m_1\boldsymbol{r}_1 + m_2\boldsymbol{r}_2}{m_1 + m_2}, \quad M = m_1 + m_2$$

とすれば、

$$M\frac{d^2\boldsymbol{r}_G}{dt^2} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2,$$

と書ける。この $\boldsymbol{r}_G$ を重心 (もしくは質量中心) と呼ぶ。重心の方程式は外力のみにより、全質量が重心に集中しているかのように見える。我々の世界の有限の大きさを持つ物体も、全質量がその重心にあるとして、物体の重心の移動を扱うことができる。

問題 2.1: 摩擦ないの床面に水平に置かれたバネ定数 k のバネの一端を固定し、他端に質量 m のおもりをつけた。バネが伸びも縮みもしていない状態での物体の座標を $x = 0$ とし、時刻 t でのおもりの位置を $x(t)$ とする。以下の問に答えよ。

1. この物体の運動を支配する運動方程式を記せ。
2. 微分方程式、
$$\frac{d^2 f}{dt^2} = -\omega^2 f \tag{3}$$
(ω は定数) の解は
$$f = A\sin\omega t + B\cos\omega t \tag{4}$$
となる。ここで、A, B は任意の定数。(4) の f を代入することにより、この f が (3) の解であることを確認せよ。
3. $t = 0$ でのおもりの位置を $x = x_0$、 その時の速度を $dx/dt = v_0$ として、1 のバネの方程式の解を求めよ。

問題 2.2: 摩擦のない板の上での 2 つのコインの衝突を考える。コイン 1 の質量は m_1、コイン 2 の質量を m_2 とする。コイン 1 を速さ V_0 で、静止しているコイン 2 にぶつけたところ、コイン 2 は衝突後、衝突前のコイン 1 の進行方向から角度 θ 左にずれた方向へ速さ V_2 で動いた。なお、コインは回転しないとする。

1. 衝突後のコイン 1 の速度 (衝突前のコイン 1 の方向の速度成分を v_{1x}、左直角方向をの成分を v_{1y} とする) を V_0, V_2, θ, m_1, m_2 を用いて表せ。
2. 角度 $\theta = 0$ で、弾性衝突であったとした時 (運動エネルギーが保存するとした時) の v_{1x} と $V2$ を求めよ。

(担当 久保川厚 ：e-mail kubok@ees.hokudai.ac.jp)

復習プリント 3 仕事とエネルギー

以下は物体の仕事と力学的エネルギーに関して、これだけは理解しておいて欲しいと思う事柄である。以下を読んで、理解し、**最後の問題 (問題 3.1-問題 3.3) を解き、来週 (7/14) 提出のこと**。なお、質問等があれば、レポートの最後に書いてください。

1. 力が物体にする仕事とは、力と力の方向に物体が移動した距離の積である:
力 $\boldsymbol{F}$ の下、物体が微小距離 $\Delta\boldsymbol{r}$ 移動したとしよう。ここで、$\boldsymbol{F}$ も $\Delta\boldsymbol{r}$ もベクトルである。$\Delta\boldsymbol{r}$ 移動する間に、この物体になされた仕事は、

$$W = \boldsymbol{F}\cdot\Delta\boldsymbol{r} \tag{1}$$

である。内積を取っているので、仕事 W はスカラーである。$\boldsymbol{F} = F_x\boldsymbol{i} + F_y\boldsymbol{j} + F_z\boldsymbol{k}$, $\Delta\boldsymbol{r} = \Delta x\boldsymbol{i} + \Delta y\boldsymbol{j} + \Delta z\boldsymbol{k}$ と $(x, y, z$ の各成分で) 書けば、

$$W = \boldsymbol{F}\cdot\Delta\boldsymbol{r} = F_x\Delta x + F_y\Delta y + F_z\Delta z. \tag{2}$$

$\boldsymbol{r}_A$ から $\boldsymbol{r}_B$ 間で移動したとすれば、

$$W = \int_{\boldsymbol{r}_A}^{\boldsymbol{r}_B}\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} = \int_{\boldsymbol{r}_A}^{\boldsymbol{r}_B}(F_x dx + F_y dy + F_z dz) \tag{3}$$

と、軌跡に沿った積分で表現される。

2. 物体になされた仕事は、その物体の運動エネルギーの変化に等しい:

運動方程式は

$$m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \boldsymbol{F} \tag{4}$$

である。両辺と $\boldsymbol{v} = d\boldsymbol{r}/dt$ の内積を取ると ($\boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{v}/dt = (1/2)d|\boldsymbol{v}|^2/dt$ となることに注意すると)、

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}m|\boldsymbol{v}|^2\right] = \boldsymbol{F}\cdot\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \tag{5}$$

となる。ここで、$K = \dfrac{1}{2}m|\boldsymbol{v}|^2$ を運動エネルギーという。

物体が $t = t_A$ で $\boldsymbol{r}_A$ にあり、$t = t_A$ から $t = t_B$ の間に $\boldsymbol{r}_B$ まで移動したとし、$t = t_A$ から $t = t_B$ まで (5) を積分すると

$$\frac{1}{2}m|\boldsymbol{v}(t_B)|^2 - \frac{1}{2}m|\boldsymbol{v}(t_A)|^2 = \int_{\boldsymbol{r}_A}^{\boldsymbol{r}_B}\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} = W \tag{6}$$

となる。すなわち、運動エネルギーの差はその間に物体になされた仕事に等しい。

3. 仕事が (物体の移動の経路によらず) 始点と終点の位置座標のみで決まるとき、ポテンシャルエネルギーが導入できる。運動エネルギーとポテンシャルエネルギーの和を力学的エネルギーという:
力にはいろいろなものがあるが、重力やバネの力による仕事は、始点と終点の位置座標のみで決まる。位置のみの関数である $U(\boldsymbol{r})$ をもちいて、

$$W = \int_{\boldsymbol{r}_A}^{\boldsymbol{r}_B}\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} = -U(\boldsymbol{r}_B) + U(\boldsymbol{r}_A) \tag{7}$$

と書くことが出来れば、エネルギーの式 (6) は

$$\frac{1}{2}m|\boldsymbol{v}(t_B)|^2 + U(\boldsymbol{r}_B) = \frac{1}{2}m|\boldsymbol{v}(t_A)|^2 + U(\boldsymbol{r}_A) \tag{8}$$

と書き直せる。U をポテンシャルエネルギー、$E = K + U$ を力学的エネルギーと呼ぶ。この場合、E は時間的に一定となる。

4. 仕事が (物体の移動の経路によらず) 始点と終点の位置座標のみで表すことが出来る力を保存力という。保存力は $\boldsymbol{F} = -\nabla U$ という風に、ポテンシャルエネルギーの空間的な傾きで表現される:
$\boldsymbol{F} = -\nabla U = -\frac{\partial U}{\partial x}\boldsymbol{i} - \frac{\partial U}{\partial y}\boldsymbol{j} - \frac{\partial U}{\partial z}\boldsymbol{k}$ は (x, y, z) 空間で、U が減少する方向にその空間的減少率に比例した力が働くことを意味する。ポテンシャルエネルギーが小さくなる方向に力が働くと言うこと。保存力の場合、運動方程式は、

$$m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = -\nabla U$$

であり、両辺と $\boldsymbol{v}$ の内積を取ると、

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}m|\boldsymbol{v}|^2\right] = -\nabla U \cdot \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial x}\frac{dx}{dt} - \frac{\partial U}{\partial y}\frac{dy}{dt} - \frac{\partial U}{\partial z}\frac{dz}{dt} = -\frac{dU}{dt} \tag{9}$$

となり、

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}m|\boldsymbol{v}|^2 + U\right] = 0 \tag{10}$$

を得る。

問題 3.1: 摩擦のないの床面に水平に置かれたバネ定数 k のバネの一端を固定し、他端に質量 m の物体をつけた。バネが伸びも縮みもしていない状態での物体の座標を $x = 0$ とし、時刻 t での物体の位置を $x(t)$ とする。以下の問に答えよ。

1. この物体が $x = x_0$ から $x = x_1$ まで移動した。物体なされた仕事を求めよ。さらに、$x = x_1$ から $x = x_0$ に戻った。$x = 0$ 殻出発して $x = 0$ に戻るまでのトータルの仕事を求めよ。
2. この物体の運動を支配する運動方程式を記せ。さらに、その方程式の両辺に (1 次元の) 速度 $v = dx/dt$ をかけ、運動エネルギーの時間変化の式を導き、力学的エネルギーが時間的に一定となることを示せ。
3. $x = 0$ で $v = v_0$ であったとする。振動の振幅 (x の最大値) はいくらか。

問題 3.2: 摩擦のある面上での運動には、速度の方向と逆向きに一定の摩擦力が働く。物体の質量を m, 摩擦力の大きさを R とする。以下の問に答えよ。

1. x 軸上の 1 次元運動を考える。摩擦力のみが働いているとする。運動方程式を記せ。(摩擦力は物体の運動と逆向きに働くことに注意)
2. この力が保存力でないことを証明せよ。(例えば、物体が $x = 0$ から $x = x_1$ まで移動し、次に $x = x_1$ から $x = 0$ に戻った時のトータルの仕事を計算する。保存力であれば仕事はゼロになる筈。重力、もしくは、バネの力と比較せよ)。

問題 3.3: 質量 m の物体を考える。そのポテンシャルエネルギーが原点からの距離 r の関数として

$$U = \frac{1}{2}kr^2 - \frac{1}{8}k\alpha^2 r^4$$

で与えられていたとする。

1. 力を求めよ。
2. 物体が、有限の領域で運動するためには、物体の初期位置および力学的エネルギーにどのような制約が必要か述べよ。

基礎物理学 I (2006 年 7 月 14 日配布)
(担当 久保川厚 ：e-mail kubok@ees.hokudai.ac.jp)

復習プリント 4 角運動量・惑星の運動

以下は角運動量と惑星の運動に関して、これだけは理解しておいて欲しいと思う事柄である。以下を読んで、理解し、**最後の問題 (問題 4.1-問題 4.4) を解き、来週 (7/21) 提出のこと**。なお、質問等があれば、レポートの最後に書いてください。

(以下では、「質点」という言葉を用いています。これは、質量は決して小さくないけれども、大きさの無視できる小さな物体のことと理解してください)

1. 物体の回転運動はベクトルで表現される。ベクトルの方向は回転軸に沿い、右ネジの方向である:
例えば、$x-y$ 平面で反時計回りの運動をしている物体であれば、ベクトルの向きは z 軸方向、時計回りであれば、$-z$ 方向である。

2. 物体の固定点周りの回転を表す量が角運動量である。固定点を始点とする質点の位置ベクトルを $\boldsymbol{r}$, 質点の速度を $\boldsymbol{v}$, 質量を m としたとき、この質点の角運動量 $\boldsymbol{L}$ は $m\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v}$:
ここで、$\times$ はベクトル積 (外積) を表す。ベクトル積は二つのベクトルからベクトルを産み出す演算で、その大きさは 2 つのベクトルの作る平行四辺形の面積。$\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v}$ であれば、$\boldsymbol{r}$ と $\boldsymbol{v}$ のなす角を θ としたとき、$|\boldsymbol{r}||\boldsymbol{v}|\sin\theta$。方向は、$\boldsymbol{r}$ から $\boldsymbol{v}$ 方向に回転したときの右ネジの方向。($x-y$ 平面上の反時計回りの運動であれば $+z$ 方向)

$x-y$ 平面上での円運動の場合の角運動量は、半径を r、質量を m、回転する質点の反時計回りの速さを v_0、回転角速度を ω とすると

$$\boldsymbol{L} = m\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v} = mrv_0\boldsymbol{k} = mr^2\omega\boldsymbol{k} \tag{1}$$

となる。ここで、$\boldsymbol{k}$ は z 軸向きの単位ベクトル。

3. 角運動量 $\boldsymbol{L}$ の時間変化は力のモーメント (トルク) により与えられる:
運動方程式の両辺に $\boldsymbol{r}\times$ を作用させることにより、

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F} = \boldsymbol{N} \tag{2}$$

を得る。力のモーメント $\boldsymbol{N}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}$ は、$\boldsymbol{r}$、$\boldsymbol{F}$ 両方に対して直角の方向を向く。

- **中心力の場合**、$\boldsymbol{F}=F\dfrac{\boldsymbol{r}}{r}$ なので、$\boldsymbol{N}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}=(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{r})F/r=0$ となり、角運動量は保存される。(例： フィギュアスケートのスピン)
- **力の向きが物体の運動している面内になる場合**、$\boldsymbol{N}$ は $\boldsymbol{L}$ と平行。同じ向きの場合には、角運動量を増大させる。逆向きの場合には角運動量を減少させる。(例： ブランコ)
- **力の向きが物体の運動している面と直交している場合**、$\boldsymbol{N}$ は $\boldsymbol{L}$ と直交。この場合には、角運動量ベクトル $\boldsymbol{L}$ の向きが、時間とともに $\boldsymbol{N}$ の方向に傾く。(例：自転車の車輪、コマ)

4. ケプラーの第 2 法則「面積速度一定」は角運動量の保存により説明できる:
角運動量保存より、$\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v}=$ 一定 である。ベクトル積の大きさは二つのベクトルが作る平行四辺形の面積なので、太陽と惑星を結ぶ線分が Δt 時間に通過する面積 ΔS は、($\boldsymbol{r}$ と $\boldsymbol{v}\Delta t$ で作られる平行四辺形の半分なので)

$$\Delta S = \frac{1}{2}|\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v}\Delta t|$$

となる。したがって、

$$\frac{dS}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{1}{2}|\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}|$$

5. 惑星の遠日点と近日点の太陽からの距離は力学的エネルギーと角運動量によって決まる:
万有引力の下での惑星の力学的エネルギーは

$$E = \frac{1}{2}m\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{GMm}{r} \tag{3}$$

と書ける。ここで、M は太陽の質量、m は惑星の質量、r は太陽から惑星までの距離、L は惑星の太陽の周りでの角運動量の大きさ。$U_e(r) = \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{GMm}{r}$ と置くと、ポテンシャル $U_e(r)$ の下での質点の一次元運動と同じになる ($U_e(r)$ を実効ポテンシャルという)。したがって、バネの運動におけるポテンシャルエネルギーと力学的エネルギーの関係からバネの運動を推察する (教科書 p.62) のと同様に、$U_e(r)$ と E の関係で惑星の運動が推察できる。E が U_e の最小値、$U_0 = -\frac{G^2M^2m^3}{2L^2}$ に等しければ、r は一定であり、円運動となり、$0 > E > U_0$ では、r は $U_e = E$ となる二つの r の間で振動する。これが一方の焦点を太陽とする楕円軌道である。r の最小値 r_{min} が近日点、最大値 r_{max} が遠日点を表す。他方、$E > 0$ では、$E = U_e$ となる点は 1 点しかなく、無限遠点から太陽に向かってきた星 (彗星?) は太陽を回って、また無限に遠くへ飛んで行ってしまうことになる。この運動形態の決定には、力学的エネルギーだけではなく、角運動量の大きさも関係することに注意。

問題 4.1: $x - y$ 平面上のベクトル $\boldsymbol{A} = A_x\boldsymbol{i} + A_y\boldsymbol{j}$ を考える。$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{A}, \quad \boldsymbol{C} = \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{B}$ を計算し、$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ を図示せよ。($A_x = A_y > 0$ とする)。

問題 4.2: フィギュアスケートにおいて、回転しているスケーターが腕を体に引き付けると回転が速くなり、腕を両側に伸ばすと回転が遅くなる。このことを説明するために、質量の無視できる長さ $2l$ の棒の両端に質量 m の質点をつけたものを考える。この先端に質点をつけた棒がスケーターの腕に対応する。

1. この棒が重心を中心として (棒に垂直な回転軸の回りに) 角速度 ω で回転しているとした時の角運動量を求めよ。
2. 回転している状態で棒の長さが半分になったとしたとき、角速度はどのように変わるか。ただし、系の外からは力が働かないとする。
3. 棒の長さが変わった後と変わる前の運動エネルギーの差を求めよ。また、この差がどうして生じたのか述べよ。

問題 4.3: ハンドルから手を離して自転車を走らせているとき、自転車を右に傾けるとハンドルはどちらを向くか。また、何故そうなるのか、説明せよ。(式を解く必要はない。角運動量ベクトルとトルクの向きから説明せよ)

問題 4.4: (3) 式を導出せよ (教科書 p.80 参照)。また、この式に基づいて、ロケットを初速 v_0 で、地表面に水平に打ち出した場合と地表面に垂直に打ち出した場合のどちらがより遠くまで行けるか論ぜよ。地球を半径 R の球とし、地球表面での重力を g とする。また、$\sqrt{gR} < v_0 < \sqrt{2gR}$ とする。(ヒント:両者では角運動量の大きさ L が異なることに注意。前者の場合、$L = mRv_0$ である)