2006年度「基礎物理学I」

担当者:　　久保川　厚
(大学院地球環境科学研究院　E-mail: kubok@ees.hokudai.ac.jp)

0 はじめに

0.1 物理学とは何か?

我々のいるこの世界は、何故にこのようであり、何故にそのように変化するのか? それは一見規則性もなく、場当たり的に見えるかも知れない。しかし、人間は、それがそうあるためにはその理由があるはずだと考える。世界を理解しようとすること、これは巨大な脳を有するようになった人間のある種本能のようなものであり、その探求はおそらく太古の昔に始まった。自然の猛威に曝された人間は、時に、その原因を神や悪霊に求める。他方、一部の人間は、この世界の規則性に着目する。いろいろな現象をつぶさに調べれば多くの場合そこに何らかの規則性を発見することができる。たとえば、水は加熱すれば沸騰し気体になる、冷やせば氷になる。これは何時でも同じである。また、潮の満ち干きは、月や太陽の位置と関係あるらしいことも知ることはできる。でも何故そうなのか?

人が何かを分かったと思うのはどういう時か? ある現象があったとき、それを、より単純な納得できる事柄を用いて、整合性のある説明できたとき、人は分かったと感じる。神話の世界では、神を前提として物語を作る。物語に矛盾がなければそれで説明ができたことになる。神を物語に含めないとき、我々は何を考えるか。物語の出発点を探す旅に出る。すなわち、全てを統べる究極の規則 (法則)、全ての物質を説明する究極の物質を探すことになる。

生命現象から宇宙までのあらゆる現象を統べる根本の法則は何か、あらゆる物質を構成する究極の物質は何か? その探求がもともとの物理学である。

物理学、もしくは、物理系学問のもう一つの顔は、根本法則からこの複雑な世界の説明を与えることである。この複雑な世界と少数の根本法則の間には大きな溝がある。根本法則は確かに正しい、しかし、そこから如何にして複雑な現実が生じるか、その「法則」を探るのもまた、物理学である (複雑系の物理なんてのが話題になっている)。そして、物理学の周辺領域に生息する多くの自然科学者達は、複雑な自然現象を物理の言葉 (法則) を用いて、説明しようとする。また、工学者・技術者の多くは、物理の法則に基づいて我々に役立つものを産み出そうとする。これを行うには、物理学を学び、それを用いて簡単な系の挙動を説明ができることが必須である。この授業の目的は、ここにある。

この講義で扱うのは、17世紀のニュートンによる「古典力学」である。ニュートンの運動方程式というのは

$$\text{運動量の時間変化} = \text{力} \tag{0.1}$$

である。ここで、運動量というのは、運動を定量的に測るもので、この場合、物体の質量 $\times$ 速度である。この運動方程式 (と作用反作用の法則) から全ての力学法則は導出可能である。

物理学はニュートン以降急速な進歩を遂げ、アインシュタインによる「相対論」、ハイゼンベルグ、シュレジンガー等による「量子力学」へと発展したが、ニュートン力学は我々の身の回りの力学現象を解釈するための根本法則として十分なものである。身の回りの力学現象とは、 例えば、走ること、跳ぶこと、宙返りをすること、ブランコを漕ぐことなど。また、空気の流れ、水の流れも力学現象であり、それ故、日々の天気も川や海の流れも波も「ニュートン力学」に従う。地震の揺れもそうである。惑星の運行、海洋潮汐等もそうである。人工物、車や飛行機や各種機械や、皆、力学の法則に従う。規則性のあるものから、明確な規則性が見い出せないものまで、すべて、(0.1) 式に従う。

0.2 目的は? そして、何を学ぶのか?

学ぶべきことは、(0.1) 式が何を意味するかであり、さらに、この方程式から、様々な物体の運動に関するどのような法則性が導かれるかである。扱う運動の大半は既に高校の物理で習ったものだと思う。しかし、ここでは、高校の物理とは違って、(0.1) 式から、数式を用いて、演繹的に全てを導出する。その目的は、将来、複雑なシステムを扱うことになるであろう諸君にそれを考えるための基礎を与えること、と (0.1) 式という単一の単純な法則を、具体的な問題に当てはめることにより、論理的思考のトレーニングを行うこと (それが可能となる回路を頭の中に作ること) にある。そして、(0.1) 式で世界を見られるようになることである。

現実に見られるすべての身近な力学現象が (0.1) 式に従うと言っても、面白そうな、複雑な現象を直接扱うことは困難である。この式に従うことは分っていても、何故、それが起きるのかが分からないことは、まだまだ山のように存在する。複雑なことを理解するためには、まず単純なことから始めねばならない。日常的に接し、当たり前であると思っているようなことでも、それを物理の言葉で説明するのは必ずしも簡単ではない。ここで重要なのは、簡略化である。その現象に本質的なものだけを残し、他の効果を無視する。単純なシステムで法則を調べ、理解し、しかる後に、それを組み立ててより複雑な現象に適用する。

「我思う故に我あり」で有名なデカルト (1596-1650) は、方法序説という本を書いている。その中で科学の方法論として、4 つの規則を挙げている。

1. 明晰性の規則 (明晰判明なもののみを真と認める)
2. 分析の規則 (問題を出来るだけ多くの小さい部分に分けて単純で分かりやすい部分を見い出す)
3. 総合の規則 (2 で見い出した単純なものから複雑なものへ)
4. 枚挙の規則 (見落としがないかどうか十分にチェックする)

授業は、まず、力学を行い、その後に振動と波動について勉強する。
講義は教科書「大学の物理入門」(小野寺、鈴木、徳永 共著：学術図書出版) に従って、その第 I 部 [力学編]、第 II 部 [波動編] について行う。ただし、第 4 章「惑星の運動」では、§1 角運動量の保存則、§2 慣性モーメントを (教科書よりも) 少し詳しく、それ以外の §4-§6 は少し軽めに扱う。また、第 5 章の連続体の力学は省略する。

0.3 如何に学ぶか?

力学は楽な科目である。何故ならば、ほとんど何も覚えなくても良い。すべては (0.1) 式から出てくる。しかし、覚えることが少ないとどう勉強していいか分らなくなる。 覚えることが少ないときには考えることが重要である。考えることにより、頭の中に新たな論理回路が作られる。その論理回路ができることにより、科学的に物事を見ることができるようになる (筈)。最も効率的なのは、身の回りのことに「不思議」を感じること。(0.1) 式を信じ、それに基づいて何故そうなるのかを常に考える。自分の頭の中にある知識がすべて整合し、分ったと思えるとき喜びがある。何を考えていいか分らないときには、問題集を買って、問題を解く。習うより馴れろ。考える訓練をすること、それが重要。(公式という形で出てくる答えを覚えないこと、常に (0.1) 式に戻って考えることも重要です)。

また、授業の後には、その日何をやったかを思い起こすこと。思い起こせなかったとき、また、思い起こしてみて良く分からなかったときには復習する。ちょっとした努力が大きな差として現れる。分かれば (実は何でも) 楽しい。(分からないことがあれば、臆せずすぐに質問してください。自分が分からないときには、他にも分からない人が必ずいます。分からないことを質問することは決して恥ずかしいことではありません)。

1　運動の表し方

1.1　物は何故落ちる?

物理学 (自然哲学) の歴史は、古代ギリシャまで遡る。重要なのは何と言ってもアリストテレス (紀元前 4 世紀の人) である。アリストテレスは、あらゆる物にはあるべき姿 (形相) が存在し、物事は、本来あるべき形相に向けて変化 (運動) すると考えた。ものが落ちるのは、宇宙の中心である地球に向かう (地球と一体化することが麗しいから) と考えた。また、物体の落下速度は重いものほど大きい。では何故月は落ちてこないのかと言えば、天界は完全でり、完全な運動である円運動を行うのだと考えた。物体は本来静止するもので、物体の速度は加える力に比例し、力を加えないと止まると考えた。

これらは、深く問わない限りにおいては、現実を説明しており、その後 2000 年弱の永きに亘ってヨーロッパでは信じられることになる。

1.2　力学ことはじめ

近代物理学の扉を開いたのは、ガリレオ・ガリレイ (1564-1642) である。ガリレイは落下の実験で有名であるが、それ以外にも、いろいろな発見をしている。慣性の法則 (ニュートンの第 1 法則) を発見したのもガリレイである。「重いものほど早く落ちる」や「運動の速さは力に比例し、力が加わらなくなると運動は停止する」というアリストテレスの考えは、現在我々が抵抗力として認識しているものも物体の特性の一部であると考えていたように思える。それに対して、ガリレイは次のように考えた。車のついた台車をなめらかな面上で走らせれば、止まるまで時間がかかり、凸凹した面上ではすぐに止まる。この事実は、「力が加わらなくなると運動は停止する」という性質は台車固有の性質ではなく、路面の作用によることを意味するであろう。そこで、この路面の抵抗も人間や動物が加える「力」と同等な力であると考え、「外から力が加わらなければ物体は静止、あるいは等速度運動を続ける」という慣性の法則に辿り着いた。これは、「力」概念の拡張（もしくは整備) である。

ガリレイは、それ以外にも、望遠鏡を作り、月を観測して、月面が凸凹であること、すなわち天界もまた完璧な世界ではないこと、また。木星に衛星があることを見つけ、コペルニクスの地動説を支持した。

1.3　ガリレオの落下運動

重いものほど早く落ちるというのは正しくない。同じ物体を重い (大きな) ものと軽い (小さな) もの２つに分けて落してみれば良い (あまり極端に大きなものと小さなものに分けると、抵抗が表面積に関係するためやはり軽い方が遅くなるが)。密度の大きなものが早く落ちるというのは観測事実に一致する。しかしこれは、空気の抵抗により、抵抗を考えなければ同じはずである。抵抗は物体の大きさや形状に依存する。それが重要でない場合を考えることにより、落下そのものの性質を抽出することが、正しい理解のためには必要。

さて、では、落下物体の速さはどのように変化するのか? ガリレイが如何にしてそれを実験的に突き止めたか見てみよう。何も分かっていない、何もない時代の研究である。現在の物理の最先端も、もっとややこしい道具は使うものの、基本的には同じである。

明らかな事実は、物体の落下に際して、最初速さゼロのものが落ちながら速くなることである。そこで、仮説、「落下の速さは時間に比例する」

$$v = gt \tag{1.1}$$

を考える。しかし、速さを直接測る術はない。距離なら物差しで測れる。距離に直そう。時刻 0 では静止している。時刻 t では速さは gt である。したがって、平均の速さは、この場合、

$$\bar{v} = \frac{v+0}{2} = \frac{v}{2} \tag{1.2}$$

また、

$$\text{距離} = \text{速さ} \times \text{時間} \tag{1.3}$$

なので、

$$h = \bar{v}t = \frac{vt}{2} = \frac{gt^2}{2} \tag{1.4}$$

となる。すなわち、時間の 2 乗に比例する。

ピサの斜塔の高さは 55m 程度。落下に要する時間は 3 秒ちょっと。これでは、距離と時間の関係は分からない。そこでガリレイは、斜面を用いることを考える。ここがおそらく彼の実験屋としての真骨頂である。普通は思いつかない。一定時間毎に斜面を転がる小球の位置に印をつけ、それが時間の２乗に比例することを示した。斜面の傾きを変えても h は t^2 に比例することを示し、そのことから垂直でも (自由落下でも) 同じになる、つまり、最初の速さは時間に比例するという仮定は正しいと結論した。

この「観察し、推論し、それを工夫された実験で検証する」は現在の科学の手法である。

[**落下の法則**]

$$v = gt \tag{1.5}$$

$$h = \frac{1}{2}gt^2 \tag{1.6}$$

我々は、g(地表での重力加速度) が 9.8m s^{-2} であることを知っている。したがって、例えば、地上 1km の雨雲から落ちてくる雨粒の速さも計算できる。計算すると、140m s^{-1} = 504km h^{-1} (時速 504km) という驚異の速さになる。水とは言え、おそらく、傘は穴だらけであろう。

現実の空気中の落下物体には抵抗が働く。これは空気分子が落下物にぶつかるためである。この抵抗は速度が比較的遅いとき (もしくは物体の大きさが小さいとき) には速度に比例する。すなわち、$-kv$ と書くことができる。ニュートンの法則はまだこの授業では出てきていないが、(0.1) 式、もしくは、高校で習ったニュートンの運動方程式を

$$\text{質量} \times \text{加速度} = \text{力}$$

先取りしよう。落下運動の場合、加速度は g なので、その時働く力 (重力) は質量を m と書くと mg である。抵抗は速さ v に比例するので、落下とともに速さが増せば、何時か、重力と抵抗力が釣り合うようになる。釣り合うと加速度がゼロなので、それ以上速さは増すことがない。それを終端速度 (限界速度) という。その速度は、右辺の力がゼロということだから、

$$0 = mg - kv$$

より、

$$v = \frac{m}{k}g \tag{1.7}$$

となる。k は主に表面積に比例し、質量には直接依存しない量なので、m が大きいほど終端落下速度は大きくなる。

先週の復習＋補足

- 力学の基本は「ニュートンの運動方程式」のみ。全てはそこから出発する。
- 高校で習った物理学の公式は使わない。
  公式は個別現象に対する答えを与えるものである。諸君は公式のない現象を将来扱う必要がある。使いたくなる気持ちは分かるが、公式のある現象を扱うときにも、公式は使わず、最初から問題を解くようにする。そうしないと、物理の本質の理解が進まず、応用力が育たない。それでは楽しくない。
- 何をやったか、必ず、後で思い起こすこと。分からないことは躊躇せずにすかさず質問する。
- ガリレオ・ガリレイは、観察・推論・検証という現代科学と同じ手法で、物体の落下の法則を明らかにした。
- 物体の落下の法則は、時刻 $t = 0$ で静かに物体を放したとすると、摩擦が無視できる場合、その速さは時間の二乗に比例して増加し、その係数は、物体の重さによらない。時刻 t での落体の速さ v と初期位置からの鉛直距離 h は、
  $$v = gt, \qquad h = \frac{1}{2}gt^2$$
  となる。
- 現実の物体の落下には空気との摩擦も重要になる (非常に軽い物体の場合には空気による**浮力**も考えなければいけない)。摩擦は、速度が遅い (また、物体が小さい) 場合には、速度に比例する (摩擦力 $= -kv$)。その場合、重力により、速度が大きくなると摩擦も強まり、何時しか、重力と摩擦力が釣り合うことになる。その速度を限界速度 (もしくは終端速度) という。終端速度は、重力と摩擦力の釣り合いから、
  $$v = \frac{m}{k}g$$
  となる。

寄り道「浮力とは何か？」

落ちる話ばかりしているが、浮き上がる話はどうなのか？ 水の中の木片は浮き上がる。ヘリウムガスを入れた風船は上昇する。これは何故か？

あらゆる物体には下向きの重力が働く。であるから、物は落ちる。コップの中の水分子も大気中の空気分子も重力を感じている。だけど、落ちない。これは、机の上に置いてある本が、重力を感じつつも落ちないのと同じである。机の上の本は机の上の本に作用してる重力と同じだけの上向きの力を机から受けている (これを垂直抗力という)。重力が働いている場で、落ちない物には、重力と同じ大きさの上向きの力が働いているので、落ちないのである。同様に、水中の水分子も周りの水分子から、正味で、重力と同じだけの上向きの力を受けている。だから止まっていられる。空気中の空気分子も同じである。

水の中の体積 V の領域を考える。水の密度 (単位体積当りの質量：水の場合、約 $1000\mathrm{kg\ m^{-3}}$) を ρ_{water} とすると、その領域には $\rho_{water}Vg$ の下向きの重力がかかるが、周りの水からは $\rho_{water}Vg$

の上向きの力がかかるので、合力がゼロとなり、水は止まっていられる［この周りの水からの力は、静水圧 (=その上にある水の重さ) の鉛直勾配による力で「圧力傾度力」と呼ばれる］。水の代わりに体積 V、密度 ρ_{tree} の木片を考えると、その木片に作用する重力は下向きに $\rho_{tree}Vg$ である。他方、周りの水から受ける上向きの力は $\rho_{water}Vg$ なので、木片は、正味、上向きに、$\rho_{water}Vg - \rho_{tree}Vg = (\rho_{water} - \rho_{tree})Vg$ を受ける。$\rho_{water} > \rho_{tree}$ なら力は上向きなので、木片は浮上する。これが浮力である。空気中の風船も同様である。

力学なぜなぜクイズ 1（片岡良美さんの出題): ヘリウムガスを入れた空気より軽い風船を、電車の中で、電車が動き出した直後に放した。風船の動きについて述べよ。ただし、電車の窓は全て閉っており、電車の外と中で空気の出入りはないとする。

1.4 直線上の運動

運動する物体の位置と速度と時間の関係を考えよう。まずは、直線上の運動である。物体の運動方向を x 軸にとる。時刻 $t = t_A$ での物体の位置が x_A、時刻 $t = t_B$ での物体の位置が x_B であったとする。ここで、$t_B > t_A$ である。［距離］＝［速度］×［時間］なので、［速度］＝［距離］÷［時間］。よって、その間の平均速度は

$$\bar{v} = \frac{x_B - x_A}{t_B - t_A} \tag{1.8}$$

となる。これは、横軸に t 縦軸に物体の位置を取ったとき (t_A, x_A) と (t_B, x_B) を結ぶ直線の傾きである。(ここでは「速さ」ではなく「速度」という言葉を用いている。速さは速度の大きさである。一次元であっても、それが正であるか負であるかによって、方向が表現できるので、ここでは「速度」を用いた)

通常、速度は時間とともに変化する。では、瞬間の速度はどうなるのか。物体の時刻 t での位置を $x(t)$、時刻 $t + \Delta t$ での位置を $x(t + \Delta t)$ とする (Δt は短い時間を表現するときによく使われる記号で、Δ と t をかけた**ものではない**)。 時刻 t と時刻 $t + \Delta t$ の間の位置の変化を Δx と置く。すなわち、

$$\Delta x = x(t + \Delta t) - x(t) \tag{1.9}$$

その時、時刻 t と時刻 $t + \Delta t$ の間の平均速度は、

$$\bar{v} = \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{(t + \Delta t) - t} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \tag{1.10}$$

時刻 t での速度は、２つの時刻の間隔 Δt を無限に小さくすれば良いので、

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} \tag{1.11}$$

微分である。すなわち、時刻 t での速度というのは、$t - x$ 面上で、物体の位置をつないだ曲線を描いたとき、その曲線の時刻 t での接線の傾きである。

速度もまた、時間の関数である。この速度の変化率を加速度という。x の代わりに v を縦軸に、横軸に t を取れば、上とまるっきり同じ話ができる。すなわち、

$$a(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} \tag{1.12}$$

前節で扱った落下の話に適用してみよう。ここでは、x 軸を下向きに取る。落下の法則は、

$$v = gt, \qquad x = \frac{1}{2} g t^2$$

dx/dt は

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2} g t^2\right\} = gt = v$$

となり、確かに、距離の時間微分が速さであることが分かる。また、

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\{gt\} = g$$

なので、落下の加速度は g であることが分かる。この g を重力加速度という。

物体の位置の変化が時間の関数として与えられたときには、その微分により、速度が、さらに速度の微分から加速度が分かることが明らかになった。では、加速度や即だが与えられているときに、物

体の位置の変化はどうなるのか？ これは、上の逆のことをすれば良い。微分の逆は積分である。速度が t の関数として与えられていたとすると、その積分から位置が分かる。v が t の関数として与えられていたとして、時刻 $t = t_A$ での位置を x_A としたときの時刻 t での位置を求めてみよう。速度と位置の関係は

$$\frac{dx}{dt} = v$$

なので、両辺を t_A から t まで積分する。すなわち、

$$\int_{t_A}^{t} \frac{dx}{dt'} dt' = \int_{t_A}^{t} v(t') dt' \ .$$

$(dx/dt)dt = dx$ なので、左辺を t による積分から、x の積分に変換できる。この時、積分区間は、$t = t_A$ で、$x = x_A$ なので、x_A から $x(t)$ までの積分になる。したがって、

$$\int_{x_A}^{x(t)} dx' = \int_{t_A}^{t} v(t') dt'$$

となる。この積分の結果は

$$x(t) - x_A = \int_{t_A}^{t} v(t') dt' \quad \text{もしくは} \quad x(t) = x_A + \int_{t_A}^{t} v(t') dt'$$

である。積分するときに注意すべきことは、積分区間である。

上の落下の問題を考えるときは、$t = 0$ で $x = 0, v = 0,$ なので、

$$v(t) = \int_0^{vt} dv' = \int_0^t \frac{dv}{dt'} dt' = \int_0^t g dt' = gt$$

$$x(t) = \int_0^t v(t') dt' = \int_0^t g t' dt' = \frac{1}{2} g t^2$$

となる。すなわち、落下距離 $x(t)$ は加速度と初期条件 ($t = 0$ での v と x) から完全に求めることができる。

1.5 2,3 次元の運動

現実世界は 3 次元である。2 次元や 3 次元ではどうなるのだろう。まず、2 次元の運動を考えよう。アパートから大学のＳ５教室まで歩くことを考えよう。その経路は地図上に描くことができる。また、時計を持って歩けば、何時何分に何処にいたかが分かる。自分のアパートを原点にして、東向きに x 軸を取り、北向きに y 軸を取る。距離の単位は m にしよう。そうすると、時刻 t に居る場所を $(x(t), y(t))$ という風に、時間の関数である x と y で表現できる。

時刻 t で (x, y) に居り、$t + \Delta t$ で $(x + \Delta x, y + \Delta y)$ に居たとしよう。その間は道は真っ直ぐだったとする。この間にあなたは、東に Δx m, 北に Δy m 進んだということになる。距離はピタゴラスの定理より $\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ m であり、方角は、東から北方向に

$$\tan\theta = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

を満足する方向である (θ はラジアン)。このようにこの 2 点間の関係は、x 方向の距離 Δx と y 方向の距離 Δy が分かれば、全て分かる。

次に速度を考えよう。この間の平均の速さ (向きに関わりなく単位時間にどれだけ進んだか) は［距離］÷［時間］なので、

$$\bar{v} = \frac{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}{\Delta t}$$

で方向は上の θ である。さて、ここで、東向きの平均速度成分 $\bar{v}_x$(この時間に東にどれだけの速さで進んだか) と北向きの平均速度成分 $\bar{v}_y$ というものを導入しよう。それらは

$$\bar{v}_x = \frac{\Delta x}{\Delta t}, \quad \bar{v}_y = \frac{\Delta y}{\Delta t}$$

である。これに対してピタゴラスの定理を適用すると

$$\bar{v} = \sqrt{\bar{v}_x^2 + \bar{v}_y^2} = \frac{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}{\Delta t}$$

となり、先ほどの［距離］÷［時間］と同じになる。また東向きから測った方角も先ほどのものと同じになる。つまり、東向きの速度成分と北向の速度成分が分かれば、その速さも方向も分かるということである。

向きと大きさを持つ量をベクトルと言い、太字や矢印で通常の大きさだけを持つ量 (スカラー) と区別する。(x, y) を始点とし、$(x + \Delta x, y + \Delta y)$ を終点とするようなベクトルは位置の変位を表すので変位ベクトルという。座標原点を始点とし、ある点 (x, y) を終点とするベクトルは、その座標系でのその点 (x, y) の座標 (=位置) を表すので、位置ベクトルという。先ほどの 1 次元の場合と同様、速度は位置の時間微分である。すなわち、位置ベクトルを $\boldsymbol{r}$、速度 (ベクトル) を $\boldsymbol{v}$ と太字で書くと、上の議論から明らかなように、$x - y$ 座標 (直交直線座標系) なら、速度の各成分は、それぞれ、位置の x 座標と y 座標の時間微分で、

$$\boldsymbol{v} = (v_x, v_y) = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right) = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$$

となる。また、速さ (速度の大きさ) は

$$|\boldsymbol{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v}}$$

となる。ここで、$\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v}$ はベクトル $\boldsymbol{v}$ 同士のスカラー積 (内積) を表す。加速度も、同様に、各成分毎に書けて

$$\boldsymbol{a} = (a_x, a_y) = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \left(\frac{dv_x}{dt}, \frac{dv_y}{dt}\right)$$

となる。

3 次元の場合は、直交直線座標系を考えれば、新たに上向きの座標 z が加わるが、位置ベクトルは各座標成分から、$\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ で、速度は、$\boldsymbol{v} = (v_x, v_y, v_z) = (dx/dt, dy/dt.dz/dt)$ で、加速度は $\boldsymbol{a} = (a_x, a_y, a_z) = (dv_x/dt, dv_y/dt.dv_z/dt)$ である。すなわち、各成分毎に考えれば良いということになる。

ここでは、直交直線座標系を用いた。この座標系はデカルトが導入したもので、デカルト座標系と呼ばれる。座標系は他にもいろいろ考えられ、場合によっては、他の座標系の方が便利なこともある。導入するときにはその時に説明する。

なお、ベクトルの表現として、上では、各座標成分を括弧でくくった。それに対して、各座標方向の単位ベクトル (大きさが 1 のベクトル) を用いるという方法もある。デカルト座標系に関しては、x 方向の単位ベクトル $i = (1, 0, 0)$、y 方向の単位ベクトル $j = (0, 1, 0)$、z 方向の単位ベクトル $k = (0, 0, 1)$ を用いて、

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{i}v_x + \boldsymbol{j}v_y + \boldsymbol{k}v_z$$

というような表現である。このような表現の方が便利な場合が多い。

1.6　投げたボールの運動

手を離してボールが落ちるときの話をした。次、ボールを水平に投げるとどのような軌跡を取るか、速度は時間とともにどう変化するか、を考えよう。座標系としては、教科書とは違うが、水平方向に x 軸と y 軸を取り、鉛直上方に z 軸を取る。崖の上から x 方向に速度 v_0 でボールを投げる。ボールを投げる場所を原点に取る。また、ボールを投げた時刻を $t=0$ とする。

前節で見たように、x, y, z, それぞれの方向成分は別々に考えて良い。ガリレイによれば、力が働かなければ物体の速さは不変である。空気抵抗を無視すれば、水平方向には力は働かない。したがって、$v_x = v_0, v_y = 0$ である。他方、鉛直方向には、加速度 g でボールは落ちる。

$$v_x = \frac{dx}{dt} = v_{x0}, \quad v_y = \frac{dy}{dt} = 0, \quad \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2} = -g$$

(ここで、z 軸は上向きに取っているので、下向きの加速度には $-$ 符号がつくことに注意)。まず、水平方向については、速さは変らないので、

$$x(t) = v_0 t, \quad y(t) = 0$$

となる。z 方向に関しては、

$$\int_0^{v_z(t)} dv_z' = -\int_0^t g dt' = -gt, \quad \int_0^{z(t)} dz' = \int_0^t v_z dt'$$

なので、

$$v_z(t) = -gt, \qquad z(t) = -\frac{1}{2}gt^2$$

である。ここで、v_z が負なのは、下向きの速度だからである。

y 座標は変化しないので良しとして、$x-z$ 面内で、ボールがどのような軌跡を取るの見てみよう。そのためには、$x = v_0 t$ と $z = -(1/2)gt^2$ から t を消去すれば良い。

$$z = -\frac{g}{2v_0^2}x^2$$

となる。これは放物線である。そもそも放物線 ($y = cx^2$) は物を放った時に描く軌跡だから放物線と言う。

水平面からの角度 θ(ラジアン) で斜め上方に速さ v_0 で投げたときにはどうなるか? この時には、$t=0$ での速度の鉛直成分が $v_0 \sin\theta$ であることから、$\frac{dv_z}{dt}$ の時間積分は

$$\int_0^t \frac{dv_z}{dt'} dt' = \int_{v_0 \sin\theta}^{v_z(t)} dv_z'$$

となり、その結果、

$$v_z(t) = v_0 \sin\theta - gt, \qquad z(t) = v_0 t \sin\theta - \frac{1}{2}gt^2$$

となる。(以下、教科書参照)

問題: 崖の上から水平にボールを投げた。ボールの軌跡を図示せよ。さらに、ボールを投げた直後、少し時間が経った後、その 2 倍時間が経った後の 3 点を選び、それらの点での速度ベクトルと加速度ベクトルを表す矢印を描き込みなさい。なお、ベクトルの大きさは矢軸の長さで表すとし、速度ベクトル、加速度ベクトル、それぞれ、3 つの相対的な大きさは可能な限り正しく描きなさい

2　ニュートンの運動の三法則

2.1　力と運動方程式

ニュートンの第 2 法則「物体の速度変化である加速度は加える力に比例する」

力の単位は N=kgm/s^2

$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$$

大学では微分形で扱う。

$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a} = m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}$$

あるいは、

$$\boldsymbol{F} = m\frac{d\boldsymbol{r}^2}{dt^2}$$

具体的問題を解く場合には 3 成分に分けて考えれば良い。

問題を解くということ。
例 1) 抵抗がある場合の落下運動
例 2) ばねによる振動
知っておく便利なこと。
· 指数関数とは微分をしても形が変らない関数
· 三角関数とは 2 階微分すると元のものにマイナスをつけたものになる関数。

問題： 摩擦のない水平面上におかれた質量 m の物体にバネ定数 k のバネがついていた。バネの他端は固定されていた。

1. その物体の平衡位置からの距離 x に関する運動方程式を記せ。
2. その運動方程式は、

   $$x = a\cos\omega t + b\sin\omega t$$

   という形の解を持つ。ここで、a, b, ω は定数で、t は時間。この解を運動方程式に代入し、ω を求めよ。また、振動の周期はどうなるか。
3. $t = 0$ で、$x = 0, dx/dt = v_0$ の時の解を記せ。

2.2　ニュートンの三法則

- 第 1 法則「外から力が働かなければ、物体は静止、あるいは等速度運動を続ける」(慣性の法則 law of inertia)

- 第 2 法則「力は物体の加速度と質量に比例する」
  運動量と力積： 質量と速度の積、$\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$、を**運動量**という。同じ速度でも質量が 2 倍であれば、運動の量は 2 倍になる。同じ質量の物体が同じ速度で動いていると思えば、2 つあるので 2 倍というのは当然。
  運動量を用いると運動方程式は、

  $$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = \boldsymbol{F}$$

と書け、「運動量の時間変化は加えられる力に等しい」となる。この式の両辺を時間 t から $t+\Delta t$ まで積分する。

$$\boldsymbol{p}(t+\Delta t)-\boldsymbol{p}(t)=\int_t^{t+\Delta t}\boldsymbol{F}dt \simeq \Delta t\boldsymbol{F}$$

この右辺の力の積分を**力積**という。これに基づけば「運動量差はその間に加えられる力積に等しい」となる。

衝突と反発係数： 速さ v で飛んできたボールが静止した壁に垂直に当り、速さ v' で跳ね返ったとする。ボールの質量を m とすると衝突後の運動量は $p'=mv'$、衝突前の運動量は $p=-mv$ で、この衝突で壁がボールにおよぼす力積は

$$I=mv'-(-mv)=m(v+v')$$

となる。衝突前後の速さの比 $e=v'/v$ を反発係数という。$v'\leq v$ なので、$e\leq 1$ である。

- 第 3 法則「物体 1 が物体 2 に作用をおよぼすとき、物体 2 は必ず物体 1 に反作用をおよぼす。作用と反作用は互いに大きさが等しく、向きは反対である」

  運動量の保存： 物体 1 が物体 2 におよぼす力を $\boldsymbol{F}_{21}$, 物体 2 が物体 1 におよぼす力を $\boldsymbol{F}_{12}$ とする。このように、考えている物体間での力を内力という。それ以外の外から与えられる力を外力という。方程式は

$$\frac{d\boldsymbol{p}_1}{dt}=\boldsymbol{F}_{12}, \qquad \frac{d\boldsymbol{p}_2}{dt}=\boldsymbol{F}_{21},$$

  $\boldsymbol{F}_{21}=-\boldsymbol{F}_{12}$ なので、両者の和をとると

$$\frac{d}{dt}\left[\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{p}_2\right]=0,$$

  となる。すなわち、内力の下では、トータルの運動量は時間的に変化しない (保存する)。

  重心： 内力以外にそれぞれに与えられる外力 $\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2$ を考える。

$$\frac{d\boldsymbol{p}_1}{dt}=\boldsymbol{F}_{12}+\boldsymbol{F}_1, \qquad \frac{d\boldsymbol{p}_2}{dt}=\boldsymbol{F}_{21}+\boldsymbol{F}_2.$$

  両式を足すと

$$\frac{d}{dt}\left[\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{p}_2\right]=\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2,$$

  左辺の運動量の和は $\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{p}_2=m_1\boldsymbol{v}_1+m_2\boldsymbol{v}_2=m_1 d\boldsymbol{r}_1/dt+m_2 d\boldsymbol{r}_2/dt$ となるので、

$$\boldsymbol{r}_G=\frac{m_1\boldsymbol{r}_1+m_2\boldsymbol{r}_2}{m_1+m_2}$$

  とすれば、

$$(m_1+m_2)\frac{d^2\boldsymbol{r}_G}{dt^2}=\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2,$$

  と書ける。この $\boldsymbol{r}_G$ を重心 (もしくは質量中心) と呼ぶ。重心の方程式は外力のみにより、全質量が重心に集中しているかのように見える。我々の世界の有限の大きさを持つ物体も、全質量がその重心にあるとして、物体の重心の移動を扱うことができる。

問題： たくさんの子が壁にボールをぶつけて遊んでいる。ボールの質量は 100g、速さ 20m/s で、1 秒間に 5 個のボールが壁にぶつかっていたとする。反発係数を 1 とした場合、壁がボールから受ける力は平均的に見たとき何 N か?

2.3 ビリヤード

1直線上を運動する物体1と物体2が衝突した場合を考える。衝突後も同じ線上を運動していたとする。質量 m の物体1と質量 M の物体2の衝突前の速度をそれぞれ、v と V、衝突後を v' と V' とする。ここで、その正負で方向を表すので、「速さ」ではなく「速度」とした。

$$V' - v' = -e(V - v)$$

運動量の保存を考慮すると、

$$v' = v - \frac{M(1+e)(v-V)}{m+M}, \qquad V' = V + \frac{m(1+e)(v-V)}{m+M}$$

となる。
力学的エネルギーが保存するのは、$e = 1$(完全弾性衝突) の時のみ。
$e = 0$(完全非弾性衝突) なら、二つの物体はくっついて $v' = V' = (mv + MV)/(m + M)$ (重心の速度) で移動する。

2.4 円運動 (等速円運動)

リンゴは木から落ちるが、月は地球に落ちてこないのは何故か? 崖の上からボールを水平に投げると放物線運動をして地表に落ちる。でも実際には地球は丸い。もし、重力がなければ、水平に投げたつもりでも、地球は丸いので、ボールに相対的に地表はどんどん下に下がり、地表からの高度は上がっていくことになる。重力がある場合、ボールは落ちるが、地表の下がり方と落方が同じであれば何時まで経っても地表に達せず、円運動を始める。

重力は地球中心の方向に働く。したがって、地球中心を始点とする位置ベクトルを $\boldsymbol{r}$ とすると、ニュートンの運動方程式は

$$m\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = -mg\frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|}$$

となる。地球の中心を通る面を考え、その面上に中心を原点とする $x-y$ 座標を考える。上の式を成分で表すと

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -mg\frac{x}{|\boldsymbol{r}|}, \quad m\frac{d^2y}{dt^2} = -mg\frac{y}{|\boldsymbol{r}|}$$

となる。円運動を仮定し、$|\boldsymbol{r}| = R =$ 一定、$g =$ 一定とすると、これらの式はバネの式 (単振動) と同じである。解は、

$$x = A\cos\sqrt{\frac{g}{R}}t + B\sin\sqrt{\frac{g}{R}}t, \quad y = A'\cos\sqrt{\frac{g}{R}}t + B'\sin\sqrt{\frac{g}{R}}t,$$

となる。円運動なので、$x^2 + y^2 = R^2$ である。初期値として $t = 0$ で $x = R, y = 0$ とすると、

$$x = R\cos\sqrt{\frac{g}{R}}t, \qquad y = \pm R\sin\sqrt{\frac{g}{R}}t,$$

が得られる。復号は、$+$ の場合は反時計回りの回転を、$-$ の場合は時計回りの回転を表す。円周に沿う方向の速さは

$$v = \sqrt{(dx/dt)^2 + (dy/dt)^2} = \sqrt{gR}$$

である。R を地球半径 $= 6400km$、g を $9.8\mathrm{m/s^2}$ とすると、$v =$7.9$times$$10^3$m/s となる。また、一回りに要する時間は $2\pi\sqrt{R/g} = 84$ 分となる。すなわち、地表近くで水平に 7.9km/s で打ち出せば、90

分弱で一回りする人工衛星になる (スペースシャトルや地球観測衛星など比較的低空を回っている人工衛星の周期は大体 90 分である)。

一般に、$x-y$ 平面上で半径 R で角速度 ω の等速円運動する物体の座標は

$$x = R\cos(\omega t + \phi), \qquad y = R\sin(\omega t + \phi)$$

と、時間的に変化する。ここで ϕ は定数で、$t = 0$ での位相を表す。速度は

$$\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \boldsymbol{i}\frac{dx}{dt} + \boldsymbol{j}\frac{dy}{dt} = -\boldsymbol{i}\omega y + \boldsymbol{j}\omega x$$

で、$\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{v} = 0$ なので、位置ベクトルと直交している。加速度は

$$\boldsymbol{a} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = -\boldsymbol{i}\omega^2 x - \boldsymbol{j}\omega^2 y = -\omega^2\boldsymbol{r}$$

となり、位置ベクトルと逆向きとなる。

慣性の法則より、力の働いていない物体は、等速直線運動をするので、方向の変化もまた力による。加速度と質量の積が力なので、等速円運動を引き起こす力は、

$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a} = m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = -m\omega^2\boldsymbol{r}$$

となり、円の中心を向いている。このような力を向心力という。なお、遠心力というのは回転しているものが感じる力で、回転する系で定義される。

力学なぜなぜクイズ 2 （沼達希望さんの出題): 回転しているボールはなぜ曲がるのか?

ボールが回転しているとボールの周りの空気はボールと空気の摩擦により、回転する。回転する物体は回転中心から外へ向かおうする。それ故、ボールのすぐ近くの空気は外へ行こうとして、そこでの圧力が (回転していない遠くの空気に比べて) 小さくなる。遠くの空気の圧力とボールのすぐ傍の圧力差が (圧力が高い方から低い方に力が働くため) 向心力となり、ボールの周りの空気が遠くに飛んでいってしまうことなく、ボールの周りで円運動し続けるように仕向ける。

さて、このボールが時計回りに回転しながら左の方に飛んでいたとしよう。この場合、ボールの上面では、空気の回転速度が増加するが、下面では回転が弱くなる。回転が速い方がより圧力が下がるので、、上面の圧力が下面のそれより低くなる。この圧力差がボールを上に持ち上げようとする。したがって、この場合、ボールの落下は重力のみの場合よりも遅くなる (バックスピン)。反時計回りの場合には、上面の圧力の方が高くなり、ボールは重力のみの場合より早く落ちる。横回転の場合も同様である。

飛行機の揚力も同じ原理で、空気の曲線運動に伴う圧力低下により説明される。

問題: スプーンの柄を軽く持ち、スプーンの丸くなっている背の部分 (凸側) を、水道の蛇口から流れ落ちる水に近付けた。スプーンの背が水に接したとき、スプーンはどう動くか? 実験せよ。さらに、その理由を考えよ。

2.5 万有引力の法則

ここまで、落下の問題では、重力加速度は一定として扱ってきた。地球表面での重力は、地球の引力と地球自転に伴う遠心力の和であるが、後者は前者に比べて小さく、基本的には地球の引力であると思って良い。地球表面での地球の引力はほぼ一定と見做せるが、太陽の周りの惑星の公転を調べると、太陽を一つの焦点とする楕円運動をしており、ニュートンはこのことから、引力は距離の二乗に反比例することを証明した。また、地球上の物体の落下は、その落下物の質量には依らなかった。このことは、引力が質量に比例することを意味する。さらに、作用反作用の法則を考えると、2つの物体間に働く引力は、それぞれの物体の質量に比例することになる。すなわち、距離 r だけ離れた質量 m_1 と m_2 の物体間に大きさ

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

で、互いに引き付け合う方向の力が働く。これを万有引力の法則という。

力が距離の二乗に反比例するというのは、電磁気的な力もそうで、比較的ありふれた形である。

この引力の形は、結構もおもしろい性質を持つ。m_1 という質量を持つ物体の影響は、

$$\frac{F}{m_2} = G\frac{m_1}{r^2}$$

と書くことができるが、この影響は、半径 r の球の球面の面積 $(4\pi r^2)$ に反比例するという言い方もできる。これは、引力による加速度をその球面で積分すると、(その球面と物体間の距離によらず) 一定になるということを意味する。つまり、ある物体の引力による加速度の' 総量' は一定である (保存する) とも言える。(これをさらに突き詰めると、任意の閉曲面を考えたとき、その内部に存在する質量による引力加速度 (ベクトル) のその閉曲面に直交する成分を閉曲面上で積分したとき、それは、その内部に存在する質量のみに依存する、ということになる)。この' 総量' が一定という性質があるため、地球の引力は、地球の質量が地球の中心に集中していると考えて、地球中心からの距離で求めることが可能になる。

3 仕事とエネルギー

前回の「たくさんの子達が壁にボールをぶつけたときに壁に加わる平均的な力」という問題に関連した質問として、「ボールがぶつかったとき、跳ね返ったときよりは跳ね返らなかったときの方が痛いのは何故か」 (T.H. さん) というのがあった。

壁がボールから受ける平均的な力は、反発係数が 1 に近いほど大きい。しかし、力が大きいからといって壁が被るダメージが大きいわけではない。これを考えるにはエネルギーという概念が有用である。

エネルギーには、力学的エネルギー (運動エネルギーとポテンシャルエネルギー)、電気的エネルギー、化学的エネルギー、熱エネルギー等、いろいろな形態がある。水力発電を考えれば、高いところの水が落ちることにより、水の持っていたポテンシャルエネルギーが運動エネルギーに変換され、この運動エネルギーを用いて、発電器を回し、電気的エネルギーに変換する。電気は各家庭に送られ、光等に変換され、最終的には熱になる。各過程でも、一部は熱に換わっているが、トータルではエネルギーは保存される。

さて、壁にボールの話に戻ると、反発係数が 1 というのは、壁にぶつかる前とぶつかって跳ね返った後のボールの速さが同じということで、これは、ボールの運動エネルギーがぶつかる前後で変化しないということである。ボールの運動エネルギーが変らないのであるから、壁には一切エネルギーは

行かない。つまり、力は加わったけれど、壁には一切変化がないということである。反発係数が1というのは固くて一切変形しない物体である。ボールは固くて変形しないが、反発係数が1より小さいという場合は、ボールが持っていた運動エネルギーの一部が壁に移ったという事である。これにより、壁は、変形したり、振動したり、壊れたりと、ダメージを受けることになる (ボールから壁に移ったエネルギーは最終的には熱になる)。

T. H さんの質問に対する答えは、「体へのダメージが大きい (ボールの運動エネルギーの多くが体に移る) 場合には、その分だけボールの運動エネルギーが減るので、ボールはあまり跳ね返らない」となる。

3.1 仕事

壁にボールをぶつけたときのボールの運動エネルギーの変化を考えよう。今問題は1次元である。運動方程式は、

$$m\frac{dv}{dt} = F$$

と書ける。両辺に v を乗じると、

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}mv^2\right] = Fv$$

これを衝突前 t_1 から衝突後 t_2 まで積分する。衝突前のボールの進行方向に x 軸を取り、その速度を $v_1(>0)$, 跳ね返ったボールの速度を $v_2(<0)$ とする。

$$\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = \int_{t_1}^{t_2} Fvdt = \int_{t_1}^{t_2} F\frac{dx}{dt}dt = \int_{x(t_1)}^{x(t_2)} Fdx$$

右辺を、壁からボールになされた「仕事」と呼ぶ。F は $-x$ 方向の力なので、負である。ボールの運動エネルギーが減少する場合には、$-x$ 方向の力を感じつつボール (の重心) は $+x$ 方向に運動し続ける。ボールが変形しないとすれば、これは、壁が変形するという事である。壁が変形することにより、壁はボールから、

$$-\int_{t_1}^{t_2} Fvdt = -\int_{x(t_1)}^{x(t_2)} Fdx$$

の仕事をされる。仮に、壁が変形しないとすれば、右辺はゼロになり、ボールのエネルギーは保存する。ボールと壁とのエネルギーのやり取りは「仕事」を通じて行われる。

(壁は変形しないがボールは変形する場合、壁はボールによって仕事をされないが、ボールは仕事をされる。これによるボールのエネルギーの減少分は、ボールの変形に伴うエネルギー (熱など) に変換される。エネルギーの形態が換わる場合にも仕事が必要である)

力 F の下で、物体が力の向きに Δr だけ移動したときに、力 F によって物体になされた仕事は、

$$W = F\Delta r$$

である。力も物体の移動距離も本来ベクトルである。ベクトルの場合には、力の方向への移動距離、もしくは、移動方向への力を用いればよい。すなわち、物体が微小距離 $\Delta\boldsymbol{r}$ だけ移動したときに力 $\boldsymbol{F}$ によってなされる仕事は、

$$W = \boldsymbol{F}\cdot\Delta\boldsymbol{r} = |\boldsymbol{F}||\Delta\boldsymbol{r}|\cos\theta$$

ここで、θ は、$\boldsymbol{F}$ と $\Delta\boldsymbol{r}$ のなす角度。P 点から Q 点まで物体が移動したとして、その間になされた仕事は、

$$W = \int_P^Q \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}$$

となる。

仕事の単位は [N m] で、これはジュールと呼ばれ、[J] と表される。

仕事は力×距離なので、時間には依らない。仕事の速い遅いは、単位時間辺りの仕事である仕事率で定量化される。仕事率の単位は [J/s] でワットと呼ばれ、[W] と表される。電灯の明るさで有名な単位である。

問題 力 $\boldsymbol{F} = F_x\boldsymbol{i} + F_y\boldsymbol{j}$ の作用する場で、物体を

$$y = x(x - L)$$

で表される線に沿って、座標 $(0, 0)$ から $(L, 0)$ まで動かした。この力が物体にした仕事を求めよ。ただし、F_x, F_y, L は定数であるとする。

3.2 運動エネルギーとポテンシャルエネルギー

ニュートンの運動方程式

$$m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \boldsymbol{F}$$

の両辺と $\boldsymbol{v}$ のスカラー積を取ると、

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}m|\boldsymbol{v}|^2\right] = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{v} = \boldsymbol{F} \cdot \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$$

となる。時刻 t_0 から t まで積分すると、

$$\frac{1}{2}m|\boldsymbol{v}|^2 - \frac{1}{2}m|\boldsymbol{v}_0|^2 = \int_{\boldsymbol{r}_0}^{\boldsymbol{r}} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = W$$

となる。ここで、$\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{v}_0$ は時刻 t と t_0 での速度、$\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{r}_0$ は時刻 t と t_0 での物体の位置である。

この式に出てくる

$$K = \frac{1}{2}m|\boldsymbol{v}|^2$$

を運動エネルギーという。ある時間の運動エネルギーの変化はその間になされた仕事に等しい。

重力による仕事とポテンシャルエネルギー

落下の問題を考えよう。落下の問題では、仕事は、鉛直上向きの座標を z とし、鉛直上向きの単位ベクトルを $\boldsymbol{k}$ とすると、$\boldsymbol{F} = -mg\boldsymbol{k}$ なので、

$$W = -\int_{\boldsymbol{r}_0}^{\boldsymbol{r}} mg\boldsymbol{k} \cdot d\boldsymbol{r} = -\int_{z_0}^{z} mgdz = -mg(z - z_0)$$

となる。すなわち、仕事は、時刻 t での高度と初期の高度の差に質量と重力加速度をかけたものになり、水平方向の距離には依らない。

物体の位置が時間とともに下降する場合、$z < z_0$ であれば、仕事は正である。これは、重力による仕事により、下向きの速度が増大し、それ故に運動エネルギーが増大することを意味する。他方、

$z > z_0$ であれば、仕事は負である。これは、物体が上に向きに投げ上げられたとき、重力による仕事により、上向きの速度が減少して、運動エネルギーが減ることを意味する。この仕事 W を上のエネルギーの式に代入し、変形すると、

$$\frac{1}{2}m|\boldsymbol{v}|^2 + mgz = \frac{1}{2}m|\boldsymbol{v}_0|^2 + mgz_0$$

となり、$(1/2)m|\boldsymbol{v}|^2 + mgz$ が一定に保たれることが分かる。重力下では、高いところにあるものは、運動エネルギーを産み出す潜在力 (ポテンシャル) がある。また、落下するとその潜在力は減少する。逆に、上に投げあげれば、運動エネルギーは減少し、潜在力は増加する。その潜在力と運動エネルギーの和は一定である。ということで、

$$U = mgz$$

をポテンシャルエネルギーと呼ぶ。運動エネルギーとポテンシャルエネルギーの和を力学的エネルギーと呼ぶ。摩擦やその他の外力がなければ、力学的エネルギーは保存する。

バネによる仕事とポテンシャルエネルギー

バネの方程式は

$$m\frac{dv}{dt} = -kx$$

である。x_0 から x まで物体が動いたとするときのバネによる仕事は

$$W = -\int_{x_0}^{x} kxdx = -\frac{1}{2}k(x^2 - x_0^2)$$

となり、始点と終点のみによる。原点からの距離が初期位置より離れれば、バネによる仕事は負となる。

また、運動方程式の両辺に v をかけると、

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}mv^2\right] = -kx\frac{dx}{dt} = -\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}kx^2\right]$$

なので、

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2\right] = 0$$

となる。したがって、

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \text{一定}$$

となる。

$$U = \frac{1}{2}kx^2$$

はバネのポテンシャルエネルギーである。

仕事は力の距離による積分である。重力による力も、バネによる力も、ポテンシャルエネルギーの空間微分にマイナスをつけたものであることが分かる。

3.3 力学的エネルギーの保存則

物体の運動エネルギーの変化は仕事による。物体が移動したとき、その間の重力やバネによる仕事は、その始点と終点の座標だけで決まる。このような場合には、終点から始点に物体がもし戻れば、運動エネルギーもまた元に戻り、ポテンシャルエネルギーを定義できる。このような性質の仕事を生み出す力を保存力という。保存力の場合、場所のみの関数であるスカラー量 $U = U(x, y, z)$ を用いて、

$$\boldsymbol{F} = -\frac{\partial U}{\partial x}\boldsymbol{i} - \frac{\partial U}{\partial y}\boldsymbol{j} - \frac{\partial U}{\partial z}\boldsymbol{k} = -\nabla U$$

と書ける。ここで $\partial/\partial x$ は x よる偏微分と呼ばれ、y と z を固定して、x について微分することを意味する。∇ はナブラ演算子と呼ばれるベクトル演算子である。∇U は U の (x, y, z) 空間での勾配を表し、$gradU$ (gradient U) と表記される場合もある。このことをイメージするには、等高線の描かれた地図を想起すれば良い。例えば、山の高さが $h(x, y)$ であるとすると、$\partial h/\partial x$ は x 軸方向に向かう時の勾配 (x 方向単位距離当りの高さの変化) を表す。y 方向についても同様であり、$-\nabla h$ は、山を下る方向 (等高線に直角に山を下る方向) を向き、その大きさが、その傾斜を表すベクトルになる。すなわち、保存力というのは、$U(x, y, z)$ という関数が与えられ、その値が小さくなる方向に、その減少率だけの大きさを持つ力 (山を下る方向に働く力) ということである。

$U(x, y, z)$ がポテンシャルエネルギーであることはすぐに分かる。点 (x, y, z) から無限小距離 (dx, dy, dz) だけ移動したときの U の変化 $dU = U(x+dx, y+dy, z+dz) - U(x, y, z)$ を U の全微分というが、これは、(x, y, z) と $(x+dx, y, z)$ での U の差、(x, y, z) と $(x, y+dy, z)$ での差、(x, y, z) と $(x+dx, y, z+dz)$ での差の和で表され、

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz = \nabla U \cdot d\boldsymbol{r}$$

となる。このことより、保存力の下で $\boldsymbol{r}_0$ から $\boldsymbol{r}$ まで物体が移動するときの保存力による仕事は

$$W = \int_{\boldsymbol{r}_0}^{\boldsymbol{r}} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = -\int_{\boldsymbol{r}_0}^{\boldsymbol{r}} \nabla U \cdot d\boldsymbol{r} = \int_{U(\boldsymbol{r}_0)}^{U(\boldsymbol{r})} dU = -(U(\boldsymbol{r}) - U(\boldsymbol{r}_0))$$

と、U の減少分に一致する。エネルギーの保存は、$\boldsymbol{r}_0$ での速度を v_0、$U_0 = U(\boldsymbol{r}_0)$ とすると

$$W = -U + U_0 = \frac{1}{2}m|\boldsymbol{v}|^2 - \frac{1}{2}m|\boldsymbol{v}_0|^2$$

なので、

$$\frac{1}{2}m|\boldsymbol{v}|^2 + U = \frac{1}{2}m|\boldsymbol{v}_0|^2 + U_0 = \text{一定}$$

となる。アナロジーで言えば、「山を下るとその分だけ運動エネルギーが増加し、山を登ればその分だけ運動エネルギーが減少する。両者の和は一定に保たれる。」ということになる。

バネ (単振動) の場合、$U = (1/2)kx^2$ で、これは 1 次元なので、$F = -dU/dx = -kx$。運動に際しては、

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

が一定に保たれるので、最大の速さは、$v_{max} = \sqrt{2E/m}$、となる。

初期に $x = x_0$ で、$v = 0$ なら、

$$E = \frac{1}{2}kx_0^2$$

で、最大の速さは、$v_{max} = \sqrt{(k/m)x_0^2}$ となる。

重力の場合、鉛直上向きを z とすると、$U = mgz$ で、$\boldsymbol{F} = -\nabla U = -mg\boldsymbol{k}$ となる。この力は鉛直下向きであるが、エネルギーの保存は、斜面上での運動でも成り立つ。それは、斜面上で運動するときに斜面から受ける垂直抗力は、運動の方向と垂直であるため、仕事をしないからである。斜面がある場合、垂直抗力を $\boldsymbol{N}$ とすると運動方程式は、

$$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = -mg\boldsymbol{k} + \boldsymbol{N}$$

これと $\boldsymbol{v}$ スカラー積 (内積) を取ると、$\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{N} = 0, -mg\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{v} = -mgv_z = -mgdz/dt$ なので、

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}m|\boldsymbol{v}|^2\right] = -mg\frac{dz}{dt}$$

となり、

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}m|\boldsymbol{v}|^2 + mgz\right] = 0$$

を得る。したがって、斜面がどのようなものであれ、その高さを z とすれば、

$$E = \frac{1}{2}m|\boldsymbol{v}|^2 + mgz = 一定$$

問題 3.3.1 x 軸に沿って水平に運動することができる質量 m の質点を考える。この質点には $k(2x-3x^2)$ という力が働いている。ここで、$k > 0$ とする。この力のポテンシャルを求め、横軸に x を取り、図示せよ。さらに、質点の初期位置による運動の仕方の違いについて定性的に述べよ。ただし、初期速度はゼロとする。

問題 3.3.2 重さの無視できる長さ l の曲がらない棒の一端を固定し、他端に質量 m のおもりをつけ、固定点を中心に鉛直面内で円弧を描くように運動させる。おもりが鉛直面内で円運動するための最下端における速さ V に対する条件を求めよ。また、棒の代わりに紐を用いた場合にはどうなるか。

捕捉：物体にする仕事と力学的エネルギー

世の中の力は保存力とそうでない力に分られる。摩擦力は保存力ではない。これは、力学的エネルギーが熱エネルギーに変わり、運動に直接的には利用できなくなるからである。また、ある物体のみに着目した場合、その物体に「外」から力が加えられたとすると、仮にその力そのものが保存力であったとしても、その物体だけでは力学的エネルギーは保存しない。すなわち、その物体のみに着目すれば常に保存力ではない。このように「外」から加えられる力を外力という。

保存力しか働いていない場合、減速するということは、ポテンシャル (加速可能性) を蓄積するということであり、加速するということは、ポテンシャルを解放するということである。力学的エネルギーはその可能性までも含めたその物体の力学的状態を表していると考えることができる。その状態を変えるのが摩擦力のような非保存的な力とか、外力である。ある物体に働く力を保存力とそうでないもの (ここでは、外力に代表させて $\boldsymbol{F}_{ex}$(ex は external の略) と書く) に分けると、力学的エネルギーの式は、

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2}m|\boldsymbol{v}|^2 + U\right\} = \boldsymbol{F}_{ex} \cdot \boldsymbol{v} \tag{3.1}$$

となる。棚に荷物を上げたとき、荷物の力学的エネルギーの増加は荷物を上げるという (重力と大きさは等しく向きが逆の) 外力によってなされた仕事に等しい。なお、荷物を下ろす場合には、重力と大きさは等しく向きが逆の外力を加えつつ、外力と逆向きに荷物を動かすので、仕事は負となる。その分だけ、荷物の力学的エネルギーは減少する。

3.4 万有引力をもたらすポテンシャルエネルギー

距離 r 離れた質量 M の物体から受ける万有引力は、物体の質量を m とすると

$$\boldsymbol{F} = -G\frac{mM}{r^2}\frac{\boldsymbol{r}}{r}$$

と書ける。ここで、$\boldsymbol{r}$ は質量 M の物体の座標を始点とし、質量 m の物体の座標を終点とする位置ベクトルである ($\boldsymbol{r}/r$ は $\boldsymbol{r}$ 方向の単位ベクトル)。

$$\nabla\frac{1}{r} = -\frac{1}{r^2}\nabla r = -\frac{1}{r^2}\frac{\boldsymbol{r}}{r}$$

なので、

$$\boldsymbol{F} = -G\frac{mM}{r^2}\frac{\boldsymbol{r}}{r} = \nabla\left(\frac{GmM}{r}\right)$$

と書くことができる。したがって、万有引力は保存力であり、ポテンシャルエネルギーは

$$U = -\frac{GmM}{r}$$

となる。

$$E = \frac{1}{2}m\boldsymbol{v}^2 - G\frac{mM}{r}$$

が力学的エネルギーとなる。

ここで、

$$\phi = -G\frac{M}{r}$$

は質量 M の物体による万有引力の場での単位質量の物体のポテンシャルエネルギーであり、これを万有引力のポテンシャルという。このようにすると考えている物体に関係なく、質量 M の物体による重力場を表すことができる。万有引力のポテンシャルは無限遠点でゼロになるように基準点を取るのが普通である (無限に遠ければ、その影響はないという考え方)。

半径 R の惑星の表面から速度 v_0 でロケットを打ち上げたとき、その力学的エネルギーは、

$$E = \frac{1}{2}m{\boldsymbol{v}_0}^2 - G\frac{mM}{R}$$

である。宇宙空間での推進装置がないとすれば、このロケットが到達できうる最も離れた場所 r_{max} は、

$$\frac{1}{2}m{\boldsymbol{v}_0}^2 - G\frac{mM}{R} = -G\frac{mM}{r_{max}}$$

より、

$$r_{max} = \frac{2GMR}{2GM - {\boldsymbol{v}_0}^2R}$$

となる。$v_0^2 \geq 2GM/R$ なら ($E \geq 0$ なら)、この惑星の重力圏を脱して遠くまで飛んでいくことが可能になる。

4　惑星の運動

惑星の運動は、ニュートン力学の形成において大変重要な役割を果たした。ニュートンの力学法則は、身の回りの物体の運動だけでなく、かつては異なる原理に支配されていると考えられていた天界の運動原理も、地表と同じ法則で説明できることを示した。それ故、教科書では、惑星運動について詳しく述べているが、この授業では、まず、身の回りの不思議に焦点を当てる。

4.1　角運動量とその保存則

身の回りの一見不思議な物理現象には、回転がらみのものが多い。変化球には、ボール周りの空気の回転を維持する向心力がボールを曲げるような圧力分布を作るという事を見た。それ以外にも、フィギュアスケートのスピンで、回転速度が変わる現象とか、回転するコマが倒れずに立ち続ける現象なども、日常目にしているにも関わらず、他の力学現象と一見異なるため、不思議に思える。この種の不思議な現象も、ニュートン力学の枠組みの中でちゃんと理解することが可能である。ここで重要になるのが角運動量の概念である。

最近は大学1年生の物理では、難解であるという事で、コマは通常扱わないが、ここでは、角運動量を導入した後に、定性的に考えていく。

物体は外力が働かなければ等速で真っ直ぐ進んでいく。その速度と質量の積を運動量という。そして、その運動量の時間変化は加える力に比例する。回転しているものも同様に力が加わらなければ回転し続けようとする。その回転の大きさと方向を表す量が「角運動量」である。

回転を考える場合、回転の中心が必要である。回転中心から物体までの位置ベクトルを $\boldsymbol{r}$ とする。運動量を $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$ と書いたとき、角運動量 $\boldsymbol{L}$ は

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$$

この $\times$ はベクトル同士の掛け算で、ベクトル積 (もしくは外積) と呼ばれる。大きさが $\boldsymbol{r}$ と $\boldsymbol{p}$ で作られる平行四辺形の面積：両者のなす角度が θ であれば、$|\boldsymbol{r}||\boldsymbol{p}|\sin\theta$ で、方向は、両者に直交する、右ネジの方向である。回転軸からの距離と回転軸に直交する速度成分の積が回転の大きさを与えるという事である。

この計算には、座標軸方向の単位ベクトル (基本ベクトル、$\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ を用いるのが便利である。

$$\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{i} = \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{j} = \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{k} = 0$$

$$\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{j} = \boldsymbol{k},\ \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{k} = \boldsymbol{i},\ \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{i} = \boldsymbol{j},\ \boldsymbol{i} \times \boldsymbol{k} = -\boldsymbol{j},\ \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{j} = -\boldsymbol{i},\ \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{i} = -\boldsymbol{k},$$

である。例えば、$x - y$ 平面上での運動を考えると

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p} = (x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}) \times ((p_x\boldsymbol{i} + p_y\boldsymbol{j}) = xp_x\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{i} + xp_y\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{j} + yp_x\boldsymbol{j} \times \boldsymbol{i} + yp_y\boldsymbol{j} \times \boldsymbol{j} = (xp_y - yp_x)\boldsymbol{k}$$

となる。

角速度 ω の等速円運動であれば、

$$v_x = -\omega y, \quad v_y = \omega x$$

なので、

$$\boldsymbol{L} = m\omega r^2\boldsymbol{k} = mvr\boldsymbol{k}$$

となる。

[角運動量の時間変化]

角運動量の時間微分を取ると、

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v}) = m\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\times\boldsymbol{v} + m\boldsymbol{r}\times\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}$$
$$= m\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{v} + m\boldsymbol{r}\times\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = m\boldsymbol{r}\times\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}$$

となる (ここで、$\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{v}=0$ を用いた)。運動方程式より $md\boldsymbol{v}/dt=\boldsymbol{F}$ なので、

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F} \tag{4.1}$$

を得る。($\boldsymbol{r}$ と運動方程式の両辺のベクトル積をとると角運動量の式が得られる)。角運動量の式の右辺

$$\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F} = \boldsymbol{N}$$

を力のモーメント、もしくは、トルクという。力が働いていない場合 (等速直線運動の時) と力の向きと $\boldsymbol{r}$ が平行な場合 (力が回転中心を向いているか、中心から真っ直ぐ外向きに力が働いている場合) には、右辺はゼロになり、角運動量は保存する。(回転を表す角運動量が直線運動でもゼロでないということを奇異に思う向きもあるかも知れない。しかし、例えば、駅のホームで通過列車が来たとき、その列車は右から来て左に遠ざかっていくとすると、この時、我々の視線は右から左に回る。すなわち、列車は見ている人の回りである程度 ($-\pi/2$ から $\pi/2$ まで) 回転するのである。) なお、以下では円運動だと思って扱う。

角運動量の保存

例えば、半径 r の円周上を速さ v で周回する質量 m の質点の角運動量の大きさは

$$L = mrv \tag{4.2}$$

もしくは、角速度を ω とすれば、$v=r\omega$ なので

$$L = mrv = mr^2\omega \tag{4.3}$$

と書ける。初期に半径 r_0 角速度 ω_0 で回転していた質点の回転半径が回転しながら徐々に大きくなっていき、$r=r'$ になったとしよう (例えば、質点は紐につながれて中心点の周りを回転していたとすれば、その紐が徐々に延びた)。この場合も、働いている力は中心力だけなので、角運動量は保存する。したがって、$r=r'$ となったときの角速度 ω' は

$$\omega' = \frac{r_0^2}{r'^2}\omega_0 \tag{4.4}$$

という風に遅くなる。逆に、回転半径が小さくなれば、回転は速くなる。例えば、フィギュアスケートのスピンにおいて、スケーターが手を広げてゆっくり回転している状態から手を体にくっつけると回転が速くなるというのはこの角運動量の保存によって説明される。ここでの議論は一つの質点に関するものであるが、§8.1 のような質点系においても、外力が働いていなければ、重心周りでの全角運動量は保存する (次節参照)。このとき、回転軸周りに質量が集中しているというのが、(4.2) 式の r が小さいことに対応し、回転軸からはなれたところにある場合が r が大きいことに対応する。体操競

技等の空中でのアクロバティックな技で、どのように角運動量が保存されているか考えるのは楽しい(かもしれない)。また、猫は背中から落しても、足から着地すると言われているが、その時猫は角運動量をゼロに保ったまま体を回転させているのである。

角運動量とエネルギー

中心力場では、角運動量が保存し、もし回転半径が変われば、(4.4) に従って、角速度が変わることを見た。この場合、この質点の運動エネルギーはどうなっているだろうか。$v = r\omega$ なので、$r = r'$ の時と $r = r_0$ の時の運動エネルギーの差は、

$$\frac{m}{2}v'^2 - \frac{m}{2}v_0^2 = \frac{m}{2}\left[\frac{r_0^2}{r'^2} - 1\right]r_0^2\omega_0^2 \tag{4.5}$$

したがって、$r' > r_0$ なら運動エネルギーは減少し、$r' < r_0$ なら運動エネルギーは増加する。この運動エネルギーの変化は何故起きるのか? この理由は 6 章にある。このシステムでは、中心力が働いている。r が大きくなるということは、中心力と逆向きに質点が動くということである。力と逆向きに質点が動いた場合、その力がする仕事 $\int \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{F}dt$ は負であるので、運動エネルギーは減少する。実際にこれで、エネルギーの差が説明できるかどうかを計算してみる。計算を簡単にするために、r の変化は非常にゆっくりであるとする。その場合には常にほぼ円運動なので、中心力は $-\omega^2\boldsymbol{r}$, 従って仕事は $-\int_{t_0}^{t'}\omega^2 r(dr/dt)dt = -\int_{r_0}^{r'}\omega^2 r dr$。角運動量保存より、$\omega = (r_0/r)^2\omega$ なので、これを代入して仕事を計算すると確かに (4.5) だけ、運動エネルギーが変化することが分かる。

力のモーメントによる角運動量の変化

運動が $x-y$ 平面上であれば、角運動量は z 成分しか持たない。力の方向が $x-y$ 平面上にある場合には、力のモーメントも z 成分のみとなる。力を

$$\boldsymbol{F} = F_x\boldsymbol{i} + F_y\boldsymbol{j}$$

とすると、

$$\boldsymbol{N} = \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F} = (xF_y - yF_x)\boldsymbol{k}$$

である。$\boldsymbol{r}$ に直交する成分を F_θ と書けば、

$$\boldsymbol{N} = \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F} = rF_\theta\boldsymbol{k}$$

となる。これは、車輪を回したり、回転を押さえたりする作用に対応する。

次に話は少し難しくなるが、力のモーメントが角運動量と直交している場合を考えてみよう。

この問題を考えるとき、これまでの質点では分かりやすくないので、ここからは輪 (自転車の車輪をイメージ) を考えることにする。単位長さ辺りの質量が σ の針金をで作った半径 r の輪の質量は $2\pi\sigma r$ である。これを m とする。輪は $x-y$ 平面内にあり、輪の中心を軸として角速度 ω で z 軸回りに回転しているとする。輪を微小長さ Δl の部分に分割すると、各部分の角運動量は、

$$\sigma\Delta l r^2\omega\boldsymbol{k}$$

である。これを全て足したのが、輪の角運動量になる。すなわち、

$$\boldsymbol{L} = 2\pi r\sigma r^2\omega\boldsymbol{k} = mr^2\omega\boldsymbol{k}$$

と 1 個の質点の場合と同じになる。

さて、輪の中心が原点であるとし、この輪に

$$\boldsymbol{F} = -fx\boldsymbol{k}$$

という力が働いたとする。ここで、f は正の定数であり、$x > 0$ では力は $-z$ 方向、$z < 0$ では力は $+z$ 方向である。これは、(この輪の回転軸は z 方向を向いているが、その) 回転軸を x 軸の方に倒すような力である。この時、輪の微小部分にかかる力のモーメントは

$$\Delta\boldsymbol{N} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} = (x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}) \times (-fkx\boldsymbol{k}) = fx^2\boldsymbol{j} - fxy\boldsymbol{i}$$

となる。これを ($x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ を用いて) 半径 r の円周に沿って一回り積分すると

$$\boldsymbol{N} = \boldsymbol{j}f\int_0^{2\pi} r^2\cos^2\theta r d\theta - \boldsymbol{i}f\int_0^{2\pi} r^2\cos\theta\sin\theta r d\theta$$

$$= \boldsymbol{j}f\int_0^{2\pi} r^2\frac{1}{2}(1+\cos 2\theta r d\theta - \boldsymbol{i}f\int_0^{2\pi} r^2\frac{1}{2}\sin 2\theta r d\theta = \boldsymbol{j}\pi f r^3$$

となる。すなわち、回転モーメントの方向は y 方向となる。このことは、もともと z 方向を向いていたベクトル $\boldsymbol{L}$ が時間とともに y 方向に傾くことを意味し、回転軸を x 方向に傾けるような力を与えると、実際には、y 軸方向に傾くことになる。「回転するコマは何故なかなか倒れないのか?」とか、「両手をハンドルから離して自転車を漕いでいるとき、体を右に倒すとハンドルが勝手に右に向いて右に曲がれるのは何故か?」ということの解答がここにある。

これは、力 $\boldsymbol{F}$ が y 軸周りの回転を与える力であると思えば、理解しやすい。この回転する輪に働く力は、$x > 0$ では下向きであり、$x < 0$ では上向きである。輪の微小部分を考えると、$x > 0$ では常に下向きの力を受けているので、その総量が最大となるのは、y 軸上である。そのため、y 軸方向に傾くと言うこともできる。

問題 4.1.1：振り子の運動を角運動量と力のモーメントで考えよう。振り子が運動する面を $y-z$ 面とする (z を鉛直上向き)。振り子の紐の長さを l、おもりの質量を m とする。

1. おもりの支点周りの角運動量の x 成分 L_x を、鉛直下方からの角度 θ(反時計回り方向を正とする) を用いて表せ。
2. 重力による力のモーメントの x 成分を求め、角運動量の変化の式を記せ。
3. $\theta = \theta_0 (> 0)$ でおもりを離した。$\theta = 0$(再下端) でのおもりの速さはいくらか。(エネルギーの保存を用いる))
4. θ_0 で紐の長さを l から l_1 に (瞬時に) 変えた。変えた後のおもりの速さはいくらになるか。(角運動量はこの時変化しない)
5. おもりの速さがゼロになる角度 θ_1 はいくらか。

紐の長さをうまい具合いに変化させると、振り子の触れ角を徐々に大きくしていくことが可能である。紐の長さを変えるというのは重心の位置を変えるということであり、これが、ブランコを漕ぐという行為に対応している。(鉄棒で、最初静止状態から触れ角を大きくして大車輪に移行するのも同じ原理である)

問題 4.1.2：ブランコを漕ぎ、触れ角を大きくするためには、どうすれば良いか。角運動量に注目し、定性的に述べよ。

4.2　慣性モーメント

半径 r の円運動を考える。物体の質量を m、回転運動は z 軸周りで、その角速度を ω とすれば、その物体の運動エネルギーは

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mr^2\omega^2$$

角運動量の z 成分は、

$$L = mrv = mr^2\omega$$

ここで、$I = mr^2$ と置くと、

$$K = \frac{1}{2}I\omega^2, \quad L = I\omega$$

となり、I を質量、ω を速度とすると、回転の運動エネルギーと角運動量の関係は、通常の運動エネルギーと運動量の関係と同じであることが分かる。すなわち、I は回転物体における慣性を表すもの (質量のようなもの) で慣性モーメントと呼ばれる。

上で考えた車輪や円板や球や任意の物体のある軸周りでの角速度 ω での回転を考える場合、その軸方向の角運動量成分 L は、その物体を微小な部分に分解し、その部分毎の角運動量の総和として定義される。すなわち、それぞれの部分の質量を m_i とし、回転軸からの距離を r_i とすると

$$L = \sum_i m_i r_i^2 \omega$$

なので、慣性モーメントは

$$I = \sum_i m_i r_i^2$$

となる。

力のモーメントが働いていないとき角運動量の保存は

$$L = I\omega = 一定$$

と書ける。フィギュアスケートのスピンも、角運動量保存の下で、腕を体に引き付けることにより慣性モーメントが変化したせいで ω が変化したのだという言い方がなされる。また、2004 年末のインド洋大津波の時には、地殻変動により地球の慣性モーメントが僅かに小さくなり、1 日の長さが 100 万分の 2.68 秒短くなった。

余談：お風呂の栓を抜くと、排水口のところに多くの場合強い渦ができる。これも角運動量の保存による。お風呂全体で弱い回転的な流れがあったとする。その水が排水口に集まり、回転軸からの距離 r が減少し、速い回転になる。台風も同様である。台風の中心 (回転軸) に周りから空気が集まり、角運動量の保存により回転が強くなる。

問題 4.2.1： 質量 M、半径 a の均質な材質で作られた、厚さが一様な円板を考える。この円板は、その中心を通り、円板に垂直な鉛直軸のまわりに自由に回転できる。この円板の慣性モーメントは $I = \frac{1}{2}Ma^2$ である。

この円盤の中心に質量 m の昆虫を置いたところ、この昆虫は真っ直ぐに円板の縁にある A 点まで歩き、縁に沿って円板を反時計回りに一周し、A 点に戻り、また、真っ直ぐに円の中心に戻った。この間に円板はどちら向きにどれだけ回転したか。

4.3　惑星の運動

400 年近く前 (1618 年) に、ケプラーはチコ・ブラーエの観測データを調べ、惑星の運動に関して次の法則があることを見い出した。

第 1 法則：惑星は太陽を一つの焦点とする楕円上を運動する

第 2 法則：惑星と太陽とを結ぶ線分が一定時間に通過する面積 (面積速度) は一定である。

第 3 法則：惑星の公転周期の 2 乗は楕円軌道の長半径の 3 乗に比例する

ニュートンは、惑星運動の三法則を説明するには惑星には太陽からの距離の 2 乗に逆比例する中心力が働いていなければいけないことを示した。万有引力の発見である。運動方程式は

$$m\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = -G\frac{Mm}{r^3}\boldsymbol{r}$$

である。中心力場 ($\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} = 0$) なので、角運動量 $\boldsymbol{L} = m\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}$ は一定となる。惑星は一定の角運動量 $\boldsymbol{L}$ に垂直な面内で運動しているので、惑星の運動は必ず平面内での運動となる。また、力学的エネルギーは既に見たように、

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right)^2 - G\frac{Mm}{r} = E$$

で、これも一定である。

4.4　ケプラーの第二法則 (面積速度一定)

面積速度一定は角運動量一定と等価である。

$|\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}|$ はベクトル $\boldsymbol{r}$ と $\boldsymbol{v}$ で作られる平行四辺形の面積である。無限小時間 dt の間に増えるこの平行四辺形の面積は $|\boldsymbol{r} \times d\boldsymbol{r}|$ である。この平行四辺形の面積の半分が、惑星と太陽を結ぶ線分が dt 時間で通過する面積である。すなわち、

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2}\frac{|\boldsymbol{r} \times d\boldsymbol{r}|}{dt} = \frac{1}{2m}|\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}|$$

となる。

4.5　ケプラーの第一法則 (楕円軌道)

惑星の軌道面を $x - y$ 平面とし、惑星の位置を太陽 (原点) からの距離と x 軸からの角度で表すと

$$\boldsymbol{r} = r\cos\theta\boldsymbol{i} + r\sin\theta\boldsymbol{j}$$

となる。従って、速度は

$$\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = (\dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\sin\theta)\boldsymbol{i} + (\dot{r}\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\theta)\boldsymbol{j}$$

ここで、$\dot{r}, \dot{\theta}$ は時間微分を表す。これより、$|\boldsymbol{v}|^2 = \dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2$ となる。それ故、運動エネルギーは

$$K = \frac{1}{2}m|\boldsymbol{v}|^2 = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2)$$

となる。角運動量の z 成分 $L = mr^2\dot{\theta}$ を用いると、力学的エネルギーは

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} - G\frac{Mm}{r}$$

と、r のみで書くことができる。第 2 項は、遠心力のポテンシャルと解釈することができる (角速度 $\dot{\theta}$ での遠心力 $= mr\dot{\theta}^2 = L^2/r^3$。これにマイナスを付けたものを ∞ から r まで積分すれば得られる)。第 2 項と第 3 項を合わせたもの

$$U_e(r) = \frac{L^2}{2mr^2} - G\frac{Mm}{r}$$

を実効ポテンシャルという。U_e の最小値は $r_0 = L^2/GMm^2$ にあり、その値、U_0 は

$$U_0 = -\frac{L^2}{2m}\left(\frac{1}{r_0}\right)^2$$

であり、$0 > E > U_0$ では、交点が 2 つある。すなわち、r はこの間を往復することになり、運動は楕円となる。また、$E = 0$ では放物線、$E > 0$ では、双曲線運動になる。$E < U_0$ には解は存在しない。計算は面倒ではあるが、実際に軌道を求めることも、もちろん、可能である。

問題 4.5.1： ロケットの打ち上げについて考える。ロケットを初速 v_0 で、地表面に水平に打ち出した場合と地表面に垂直に打ち出した場合のどちらがより遠くまで行けるか論ぜよ。地球を半径 R の球とし、地球表面での重力を g とする。また、$\sqrt{gR} < v_0 < \sqrt{2gR}$ とする。

4.6 ケプラーの第三法則 (周期)

惑星が太陽を一回りする周期 T の 2 乗が長半径の 3 乗に等しいというのが第 3 法則であるが、楕円を考えるのは面倒なので、この授業では、円運動を仮定し、半径の 3 乗に比例することを示すに止めることにする。興味のある人は教科書を参照頂きたい。

半径 a の円運動の場合、向心力の大きさは、周期を T とすると、

$$F = m\omega^2 r = \frac{4\pi^2 ma}{T^2}$$

である。これが、万有引力に等しいので、

$$\frac{4\pi^2 ma}{T^2} = G\frac{Mm}{a^2}$$

よって、

$$T^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{GM}$$

となる。